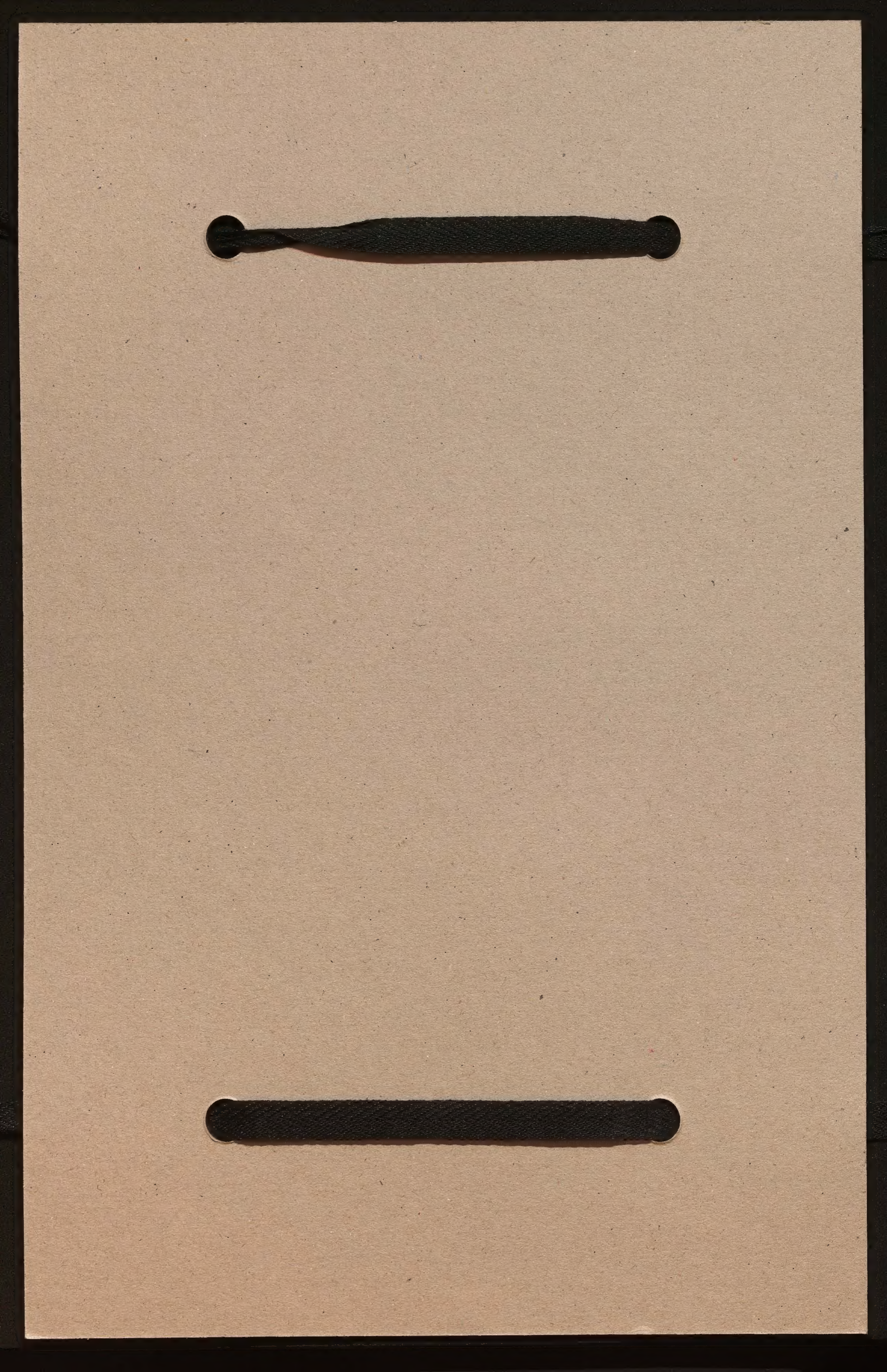
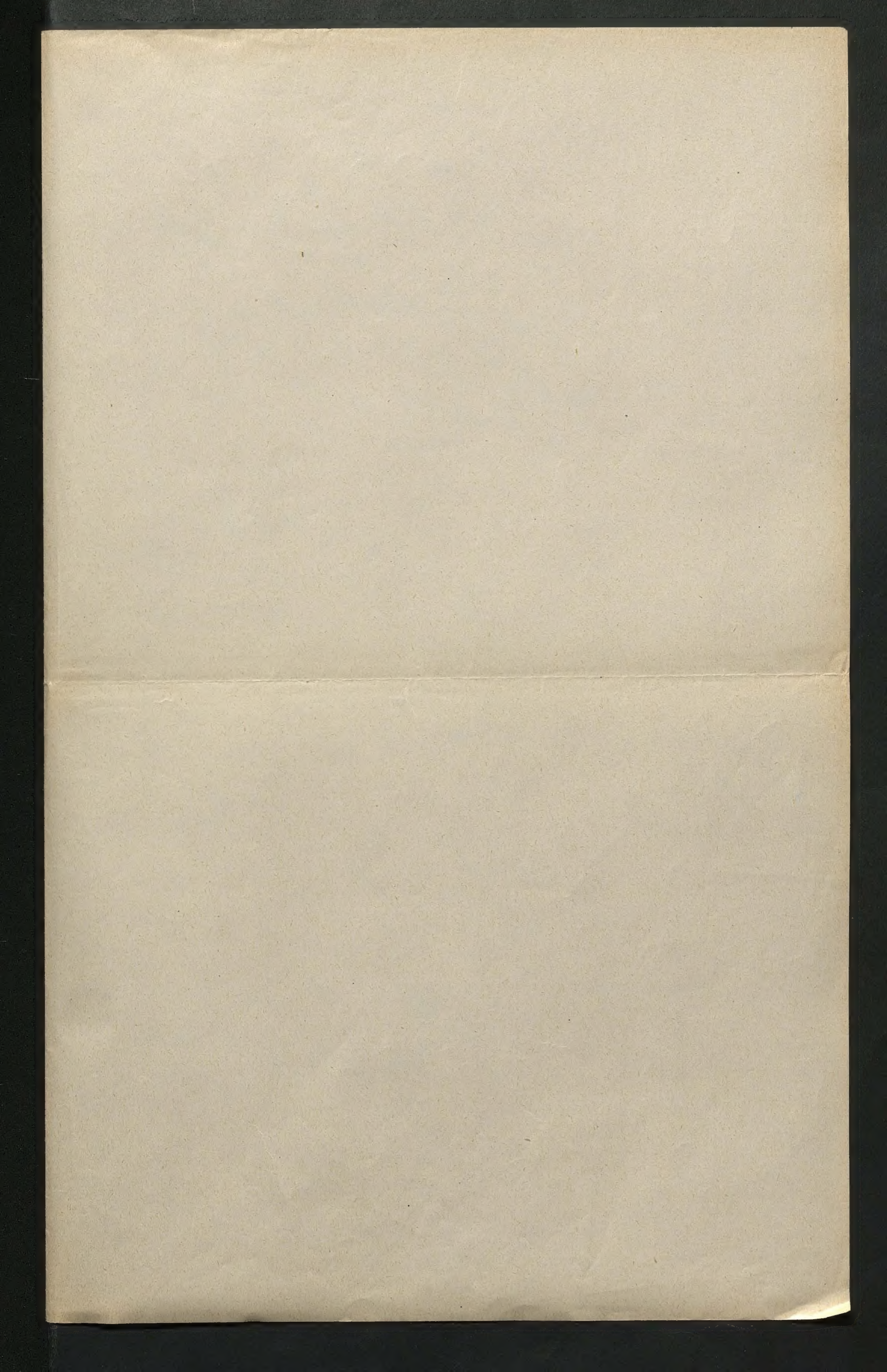
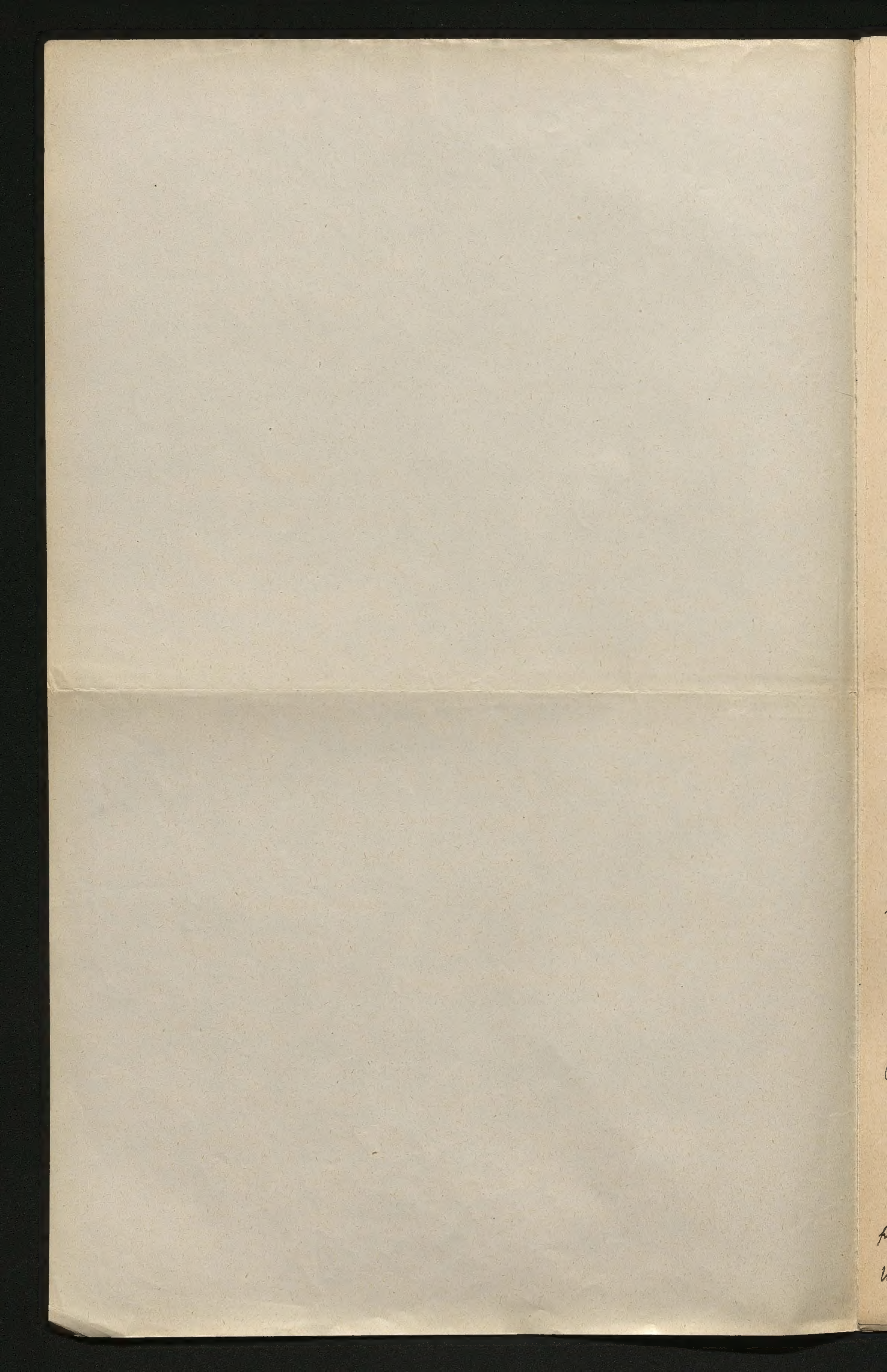






# Über ein Paradoxon in der kinetischen Theorie der Lösungen.

Von M. v. Smoluchowski

§1. Als Grundlage der kinetischen Theorie der Lösungen dient der Satz, dass die Moleküle einer gelösten Substanz sich ganz analog wie Gasmoleküle verhalten, so dass sich die mittlere Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung derselben aus der für Gasmoleküle giltigen Formel berechnet:

$$C = \sqrt{\frac{2\alpha\theta}{M}}$$

in welcher $\theta$ die absolute Temperatur, $\alpha$ einen ungefähr $3{\cdot}6 \cdot 10^{-16}$ betragenden Zahlenkoeffizienten, und $M$ das chemische Molekulargewicht bedeutet.

Diese Analogie, welche auf dem Maxwell'schen ~~[illegible]~~ Äquipartitionsgesetze der Energie beruht, findet ihren Ausdruck in dem ~~[illegible]~~ Van't Hoff'schen Gesetzen des osmotischen Druckes. Auf derselben Grundlage haben Einstein und der Verfasser der vorliegenden Notiz eine kinetische Theorie der Brown'schen Molekularbewegung aufgebaut, deren Folgerungen namentlich ~~[illegible]~~ durch die experimentellen Arbeiten Perrin's und seiner Schüler, ~~[illegible]~~ Svedberg u. A., so genau quantitativ bestätigt worden sind, dass man dies heute als einen der augenfälligsten Beweise der kinetischen Theorie ansieht.

Demgegenüber möchte ich auf eine eigentümliche Schwierigkeit bei der Anwendung jenes Grundsatzes hinweisen, ~~welche vielleicht schon Anderen aufgefallen sein mag~~, welche sich zu einem scheinbar ~~ganz~~ gewichtigen Einwand gegen alle jene Berechnungen ~~[illegible]~~ zuspitzen liesse. ~~[illegible] vielleicht schon Anderen~~ Es sollte mich wundern wenn dieselbe nicht schon Anderen aufgefallen wäre, doch habe ich nirgends eine Erwähnung gefunden.

§2. Jedem der sich mit theoretischer Hydrodynamik beschäftigt, ist es ja wohlbekannt, dass ein in einer Flüssigkeit bewegter Körper gewisse Reactionskräfte erfährt, deren Wirkung insbesondere das Beharrungsvermögen desselben vermehrt. Es hat dies schon 1833 ~~[illegible]~~ Green bei der Theorie des Pendels in Betracht

1)

gezogen und später sind eingehende Theorien derartiger Erscheinungen von Stokes, Dirichlet, Clebsch, Thomson u. Tait, Kirchhoff u. A. gegeben worden. Im Falle einer ungleichförmig bewegten Kugel ist die Wirkung der umgebenden Flüssigkeit vollständig äquivalent mit einer Vergrösserung der Masse der Kugel um die Hälfte der verdrängten Flüssigkeitsmasse. Für andere Körperformen gelten andere Relationen, auch können in gewissen Fällen Drehungsmomente zustande kommen. Sogar ein Hohlraum in einer idealen Flüssigkeit besitzt demnach eine scheinbare Masse, was in einer der zahlreichen Theorien über die Natur der Atome dahin verwertet wurde, dass dieselben als Löcher im Äther aufgefasst wurden.

Angesichts dieser ganz ausser Zweifel stehenden Resultate der theoretischen Hydrodynamik würde es also scheinen, dass auch die suspendierten Körperchen, welche die Brown'sche Wimmelbewegung ausführen, sich so bewegen müssten als ob ihre Masse vermehrt wäre. Das Äquipartitionsgesetz von Maxwell muss natürlich in jedem Falle aufrecht erhalten bleiben,

aber man würde ausser der kinetischen Energie des bewegten Teilchens auch noch die kinetische Energie der damit verbundenen Flüssigkeitsbewegung in Rechnung zu stellen sein; dies ist gleichbedeutend mit jener Vermehrung der Masse, somit würde die Anwesenheit der Flüssigkeit im Falle eines kugelförmigen Teilchens vom Volumen ω eine Verkleinerung der Molekulargeschwindigkeit hervorrufen:

$$C' = \sqrt{\frac{2\alpha\theta}{M + \frac{1}{2}\omega\rho}}$$

Es sind das durchaus keine geringfügigen Änderungen, denn im Falle der von Perrin, Dombrowski, Chaudesaigues verwendeten Mastix- und Gummigutt-Emulsionen würde die aus dieser Formel folgende Geschwindigkeit C' nur beiläufig 0·82 des nach der früheren Formel berechneten Wertes betragen.

§3. Was von derartigen mikroskopisch sichtbaren Teilchen der Emulsionen gesagt wurde, müsste wohl auch für eigentliche kolloidale Lösungen (Eiweiss, Gummi u. dgl.) gelten. Ob sich dieselbe Überlegung auch auf krystalloide Lösungen anwenden lässt, in welcher die Moleküle des

gelösten Substanz und des Lösungsmittels von gleicher Grössenordnung sind, erscheint allerdings etwas zweifelhaft, da in diesem Falle das Lösungsmittel nicht mehr als homogenes Medium aufgefasst werden darf. Andererseits könnte man darauf hinweisen, dass z.B. bei Berechnung der Grössenordnung der elektrolytischen Ionen aus dem Reibungswiderstande derselben die Flüssigkeit mit Erfolg als homogenes Medium behandelt wird.

§4. Nun scheint sich aber auf dem Gebiete krystalloider Lösungen eine einfache experimentelle Controlle darzubieten; wahrscheinlich wird ein jeder Chemiker sofort einwenden, dass ja die bekannten kryoskopischen, ebullioskopischen u. dergl. Methoden für gelöste Stoffe das richtige chemische Molekulargewicht ergeben und durchaus keine Vergrösserung des Molekulargewichtes infolge Einflusses des Lösungsmittels erkennen lassen. Das wäre jedoch eine oberflächliche Argumentation.

Sämmtliche zur Bestimmung des Molekulargewichts gelöster Stoffe verwendeten Methoden beruhen nämlich indirekt auf dem Gesetze des osmotischen Druckes, und sie werden richtige Werte geben, gleichgiltig ob man die Hypothese der „scheinbaren" Masse einführt oder nicht. Die Anzahl der Grammmolekule wird ja hiedurch nicht geändert, denn sie hängt mit der in die Lösung eingeführten Masse der Substanz zusammen, nicht aber mit der in Lösung befindlichen (eventuell scheinbar vermehrten) Masse.

Auch gibt das Gesetz: $p = \frac{1}{3} n M C^2$

natürlich keinen Anhalt zur Entscheidung, da infolge des Äquipartitionssatzes auf jeden Fall $MC^2 = M'C'^2 = 2\alpha\theta$ sein muss.

Auf diesem Gebiete versagen somit die Methoden unmittelbarer experimenteller Entscheidung, und merkwürdigerweise verhält es sich gerade so auch mit den Folgerungen, welche man aus Beobachtung der Brown'schen Bewegung ziehen kann.

Ob man sich beispielsweise der von Einstein angewendeten, auf dem Begriff des osmotischen Druckes beruhenden, oder der von mir angewendeten direkten Berechnungsmethode bedient, auf jeden Fall erhält man dieselben Endformeln für die Verschiebung der Teilchen, für die unter Einfluss der Schwere sich einstellende Verteilung derselben, sowie für den Diffusionscoefficienten, unabhängig davon ob man eine scheinbare Masse annimmt oder nicht,

also können wir aus diesen Erscheinungen keinen experimentellen Aufschluss betreffs dieser Frage ableiten.

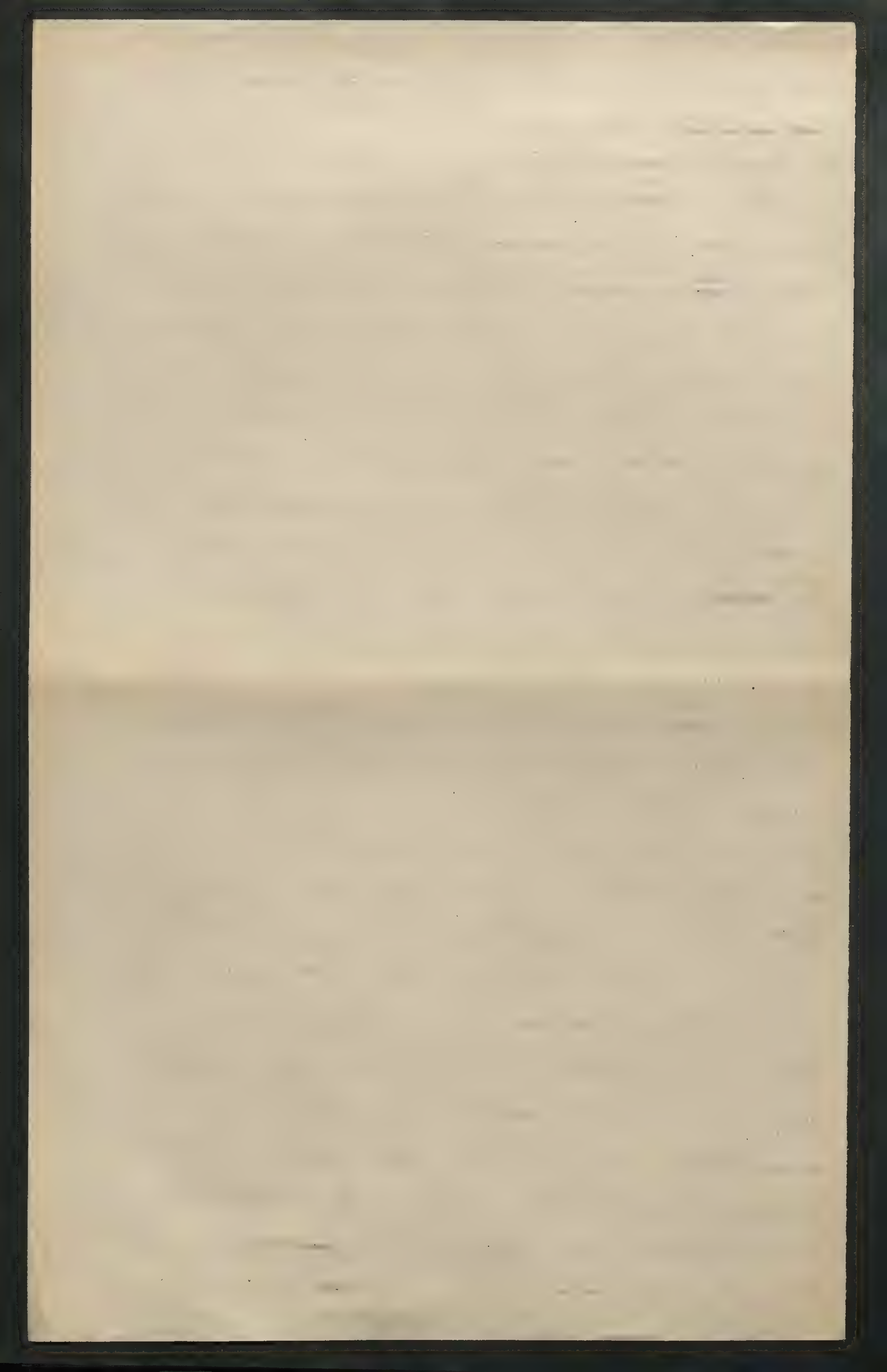
§ 5. Die praktische Bedeutung jener Frage ist dadurch sehr verringert, aber für die Theorie ist es desto wichtiger zu wissen ob die Molekulargeschwindigkeit, zu deren direkter Messung uns derzeit kein Weg offen steht, nach Formel (1) oder Formel (2) zu berechnen ist. Man muss da also zu rein theoretischen Überlegungen Zuflucht nehmen.

Diese führen meiner Ansicht nach doch zu dem Schluss, dass die im Obigen dargelegte Hypothese einer scheinbaren Masse unberechtigt ist und dass die bisherigen Theorien, mit Beibehalt der Formel (1), gültig sind. Denn das Maxwell'sche Äquipartitionsgesetz spezifiziert gar nicht näher die Art der mechanischen Systeme, auf welche es sich bezieht, und muss ebenso auf ein von Gas umgebenes Teilchen wie auf ein von Flüssigkeitsmolekülen anwendbar sein. In jedem Falle sollte die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung [dieselben] [gleich] sein der kinetischen Energie eines Gasmoleküls von gleicher Temperatur.

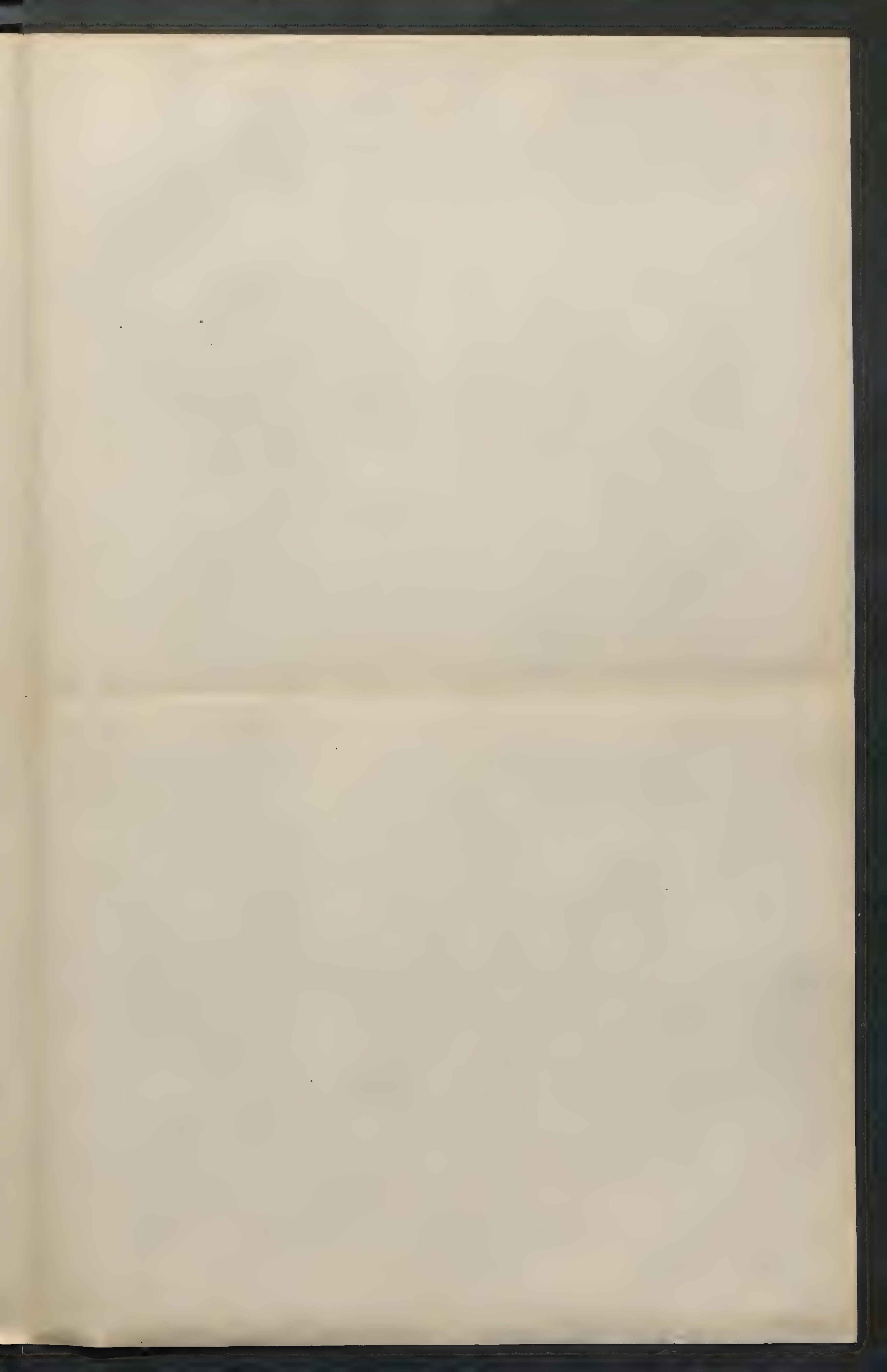
Wenn es also homogene Flüssigkeiten gäbe, von der Art wie sie die Hydrodynamik voraussetzt, welche an den sich bewegenden suspendierten Teilchen dicht anliegen würden, so wäre eine jede beliebig kleine Verschiebung der letzteren notwendigerweise mit einer entsprechenden Flüssigkeitsströmung verbunden und der entsprechenden kinetischen Energie müsste man tatsächlich durch Berücksichtigung der scheinbaren Masse Rechnung tragen.

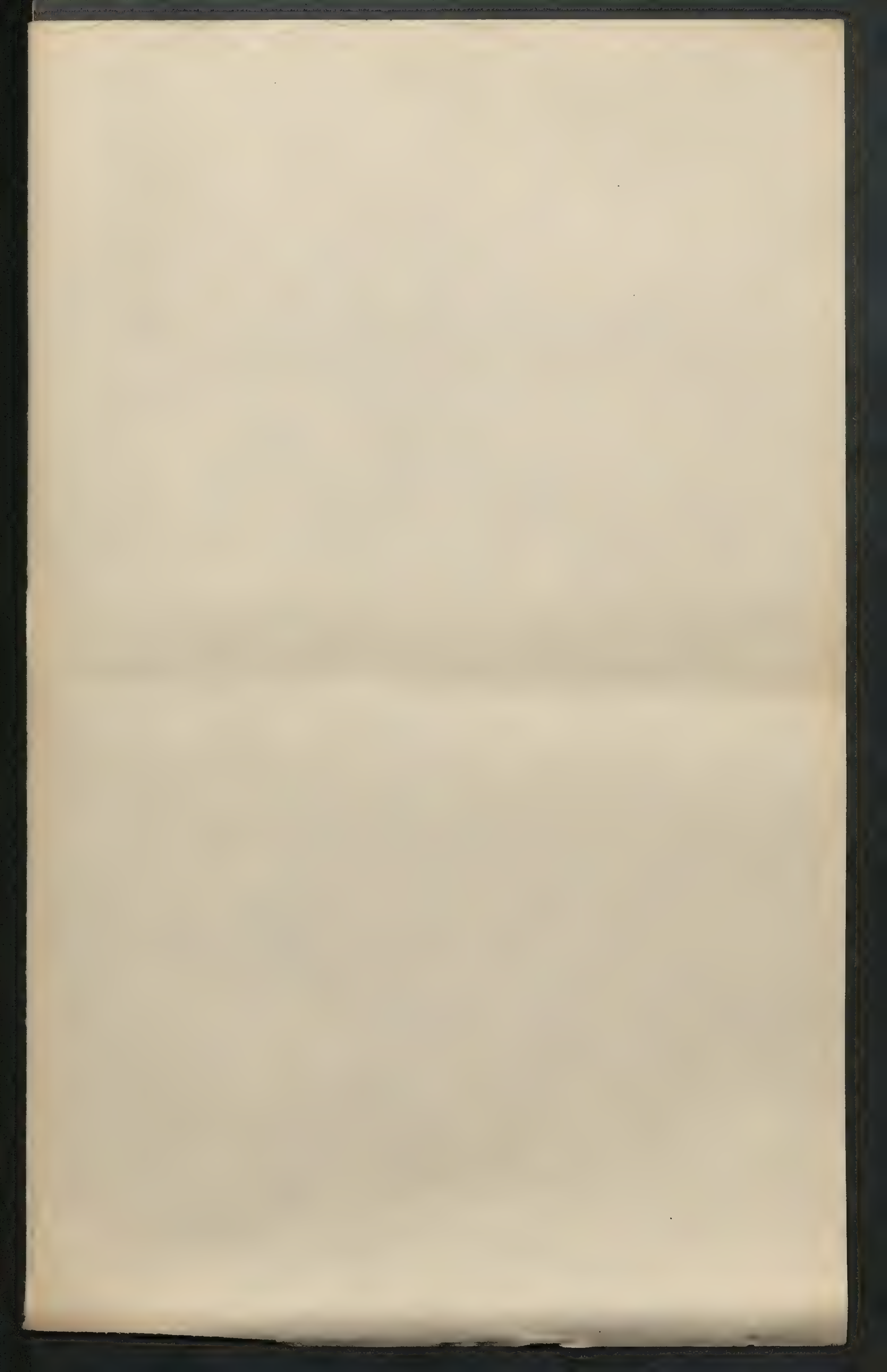
In Wirklichkeit jedoch besteht eine gewisse Bewegungsfreiheit für die Relativbewegung des suspendierten Teilchens und der umgebenden Flüssigkeitsmoleküle; die Schwerpunkts-Coordinaten derselben sind kinematisch unabhängige Veränderliche,
daher kommt im Äquipartitionsgesetz nur die wirkliche Masse des Teilchens in Betracht.

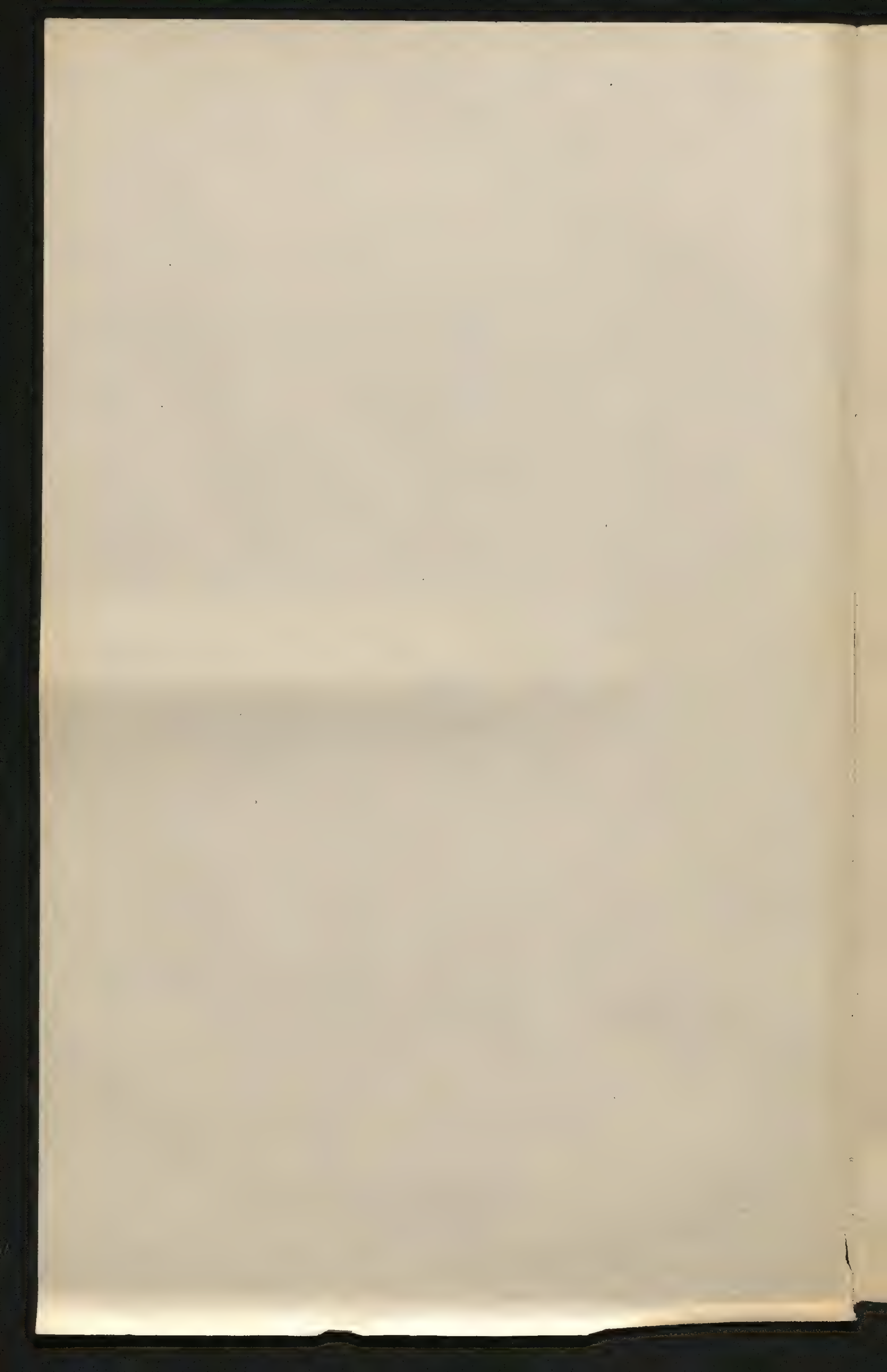
Daraus folgt nachstehende, recht paradoxal klingende Behauptung:
Stellen wir uns dieselbe Substanz bei einer gewissen Temperatur in zwei verschiedenen Lösungsmitteln gelöst vor, und zwar bestehe das eine aus einer wirklichen, molekular zusammengesetzten, das andere aus einer homogenen idealen Flüssigkeit. Dann haben die gelösten Moleküle in der ersten Lösung eine von der Natur des Lösungsmittels unabhängige, aus Formel (1) folgende Molekulargeschwindigkeit, wogegen die Geschwindigkeit derselben in der zweiten Lösung geringer sein wird und von der Dichte

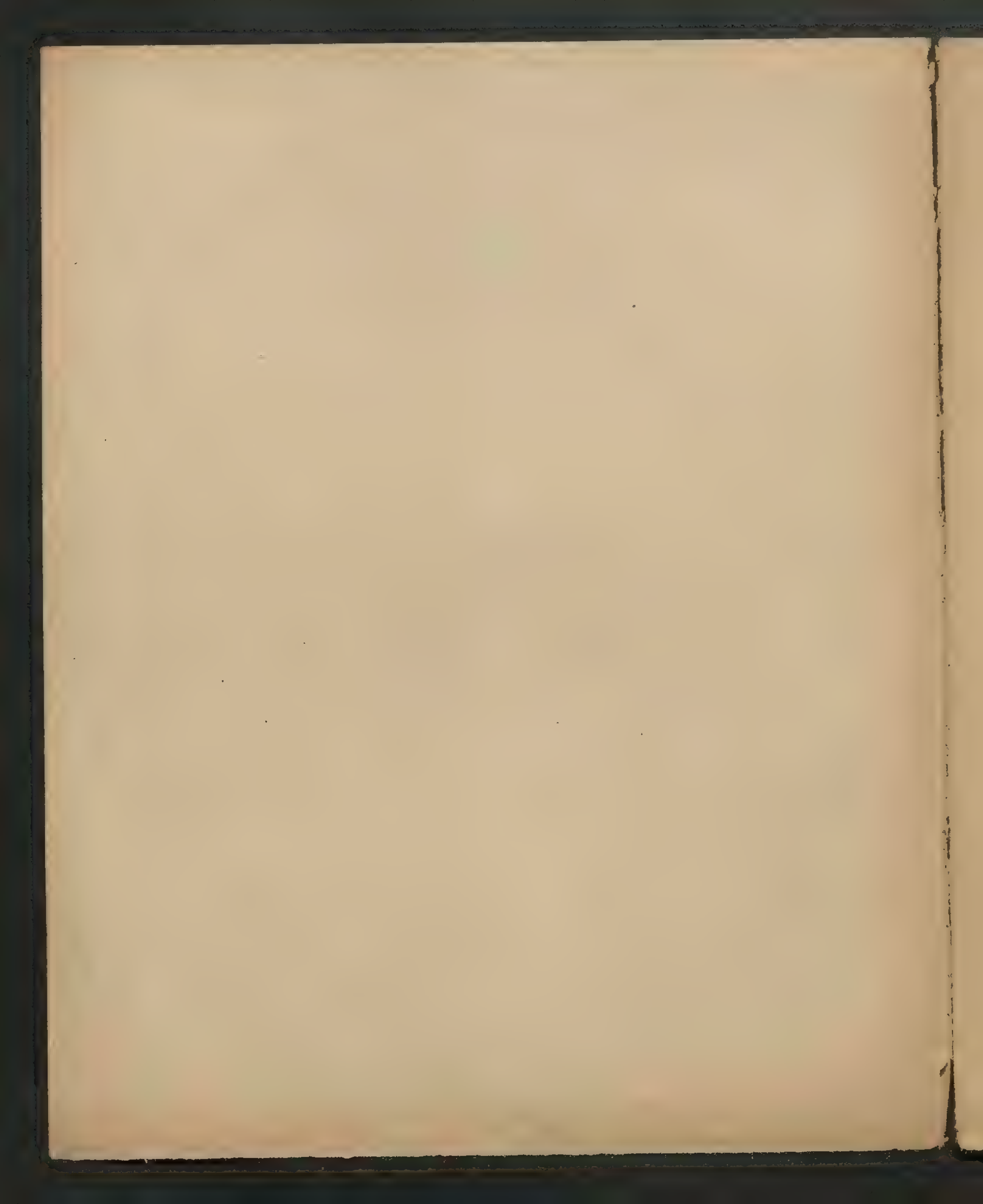


das Lösungsmittel nach Formel (2) abhängen wird. Man würde wohl von vornherein glauben, dass eine molekular zusammengesetzte Flüssigkeit durch fortgesetzte Verkleinerung der Moleküle und Vergrösserung ihrer Geschwindigkeiten einer homogenen Flüssigkeit gleich gemacht werden könnte. Dagegen sieht man dass hier ein ganz fundamentaler Unterschied zu Tage tritt. Das Äquipartitionsgesetz gibt ja bekanntlich auch zu anderen Paradoxen Anlass, indem z.B. kugelförmige Gasmoleküle in Bezug auf das Verhältnis der spezifischen Wärmen $k = 1\frac{2}{3}$, nicht als Grenzfall ellipsoidaler Moleküle aufgefasst werden können, da diese ein $k = 1\frac{2}{5}$ oder $k = 1\frac{1}{3}$ aufweisen müssen, aber in solchen Fällen kann man den Grundsatz „natura non facit saltus" noch durch Betrachtung der stufenweisen Änderung der Relaxationsgeschwindigkeit retten. Im obigen Falle tritt dagegen das Paradoxale noch krasser hervor.









Bestimmung der Constanten des $u$:

$u$ wird am grössten in der Mitte also $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ für $y=0$

also $\frac{c_3}{\mu x}=0$ für alle $t$ also $c_3=0$

$p=\sqrt{\mu c_2}\sqrt{\log c_4 - 2\log x}$ wird $=p_0$ für $x=R$

$p_0=\sqrt{\mu c_2}\sqrt{\log c_4-2\log R}$ $\quad \frac{p_0^2}{\mu c_2}=\log c_4-2\log R$ $\quad \log c_4 = 2\log R+\frac{p_0^2}{\mu c_2}$

$$p=\sqrt{\mu c_2}\sqrt{\frac{p_0^2}{\mu c_2}+2\log\frac{R}{x}}$$
$$=\sqrt{p_0^2+2\mu c_2\log\frac{R}{x}}=\sqrt{p_0^2-2\mu c_2\log\frac{x}{R}}$$

für $x=0$ wird $p$ von höherer als jeder endlichen Ordnung $=\infty$

also $p x|_{x=0}=\infty$

$u$ ist $=0$ für alle Punkte der Axe also für $x=0$ und beliebige $y, t$

und für $y=a$ und beliebige $x$

$0=\frac{c_2a^2}{2px}+e_1$ $\quad e_1=-\frac{c_2a^2}{2px}$

$0=0+e_1$ $\quad e_1=0$ für $x=0$ und beliebige $y$ und $t$

$$u=\frac{c_2y^2}{2px}+e_1=\frac{c_2(y^2-a^2)}{2px}$$

---

$$cxp=\int_0^a u\,dy+x\int_0^a\frac{\partial u}{\partial x}dy+ax\frac{\partial p}{\partial t}$$

$a=\frac{\theta-t}{c}$ also für gleichförmige Bewegung

$$cApx=\int_0^a u\,dy+x\int_0^a\frac{\partial u}{\partial x}dy+aAx\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$cApx-\int_0^{\frac{\theta-t}{c}}\frac{c_2y^2}{2px}+e_1+x\left\{-\frac{c_2y^2}{2}\frac{1}{p^2x^2}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right\}dy=aA\frac{\partial(px)}{\partial t}$$

$$Acpx-\frac{\theta-t}{c}e_1-\frac{c_2\left(\frac{\theta-t}{c}\right)^3}{6px}\left[1+\frac{1}{px}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right]=aA\frac{\partial(px)}{\partial t}=-aA\frac{\partial(pux)}{\partial x}$$

$$=-aAu\frac{\partial(px)}{\partial x}-aApx\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=-aA\left\{\frac{c_2y^2}{2px}\frac{\partial(px)}{\partial x}+e_1\frac{\partial(px)}{\partial x}-px\frac{c_2y^2}{2p^2x^2}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right\}$$

$$=-aAe_1\frac{\partial(px)}{\partial x} \quad !$$

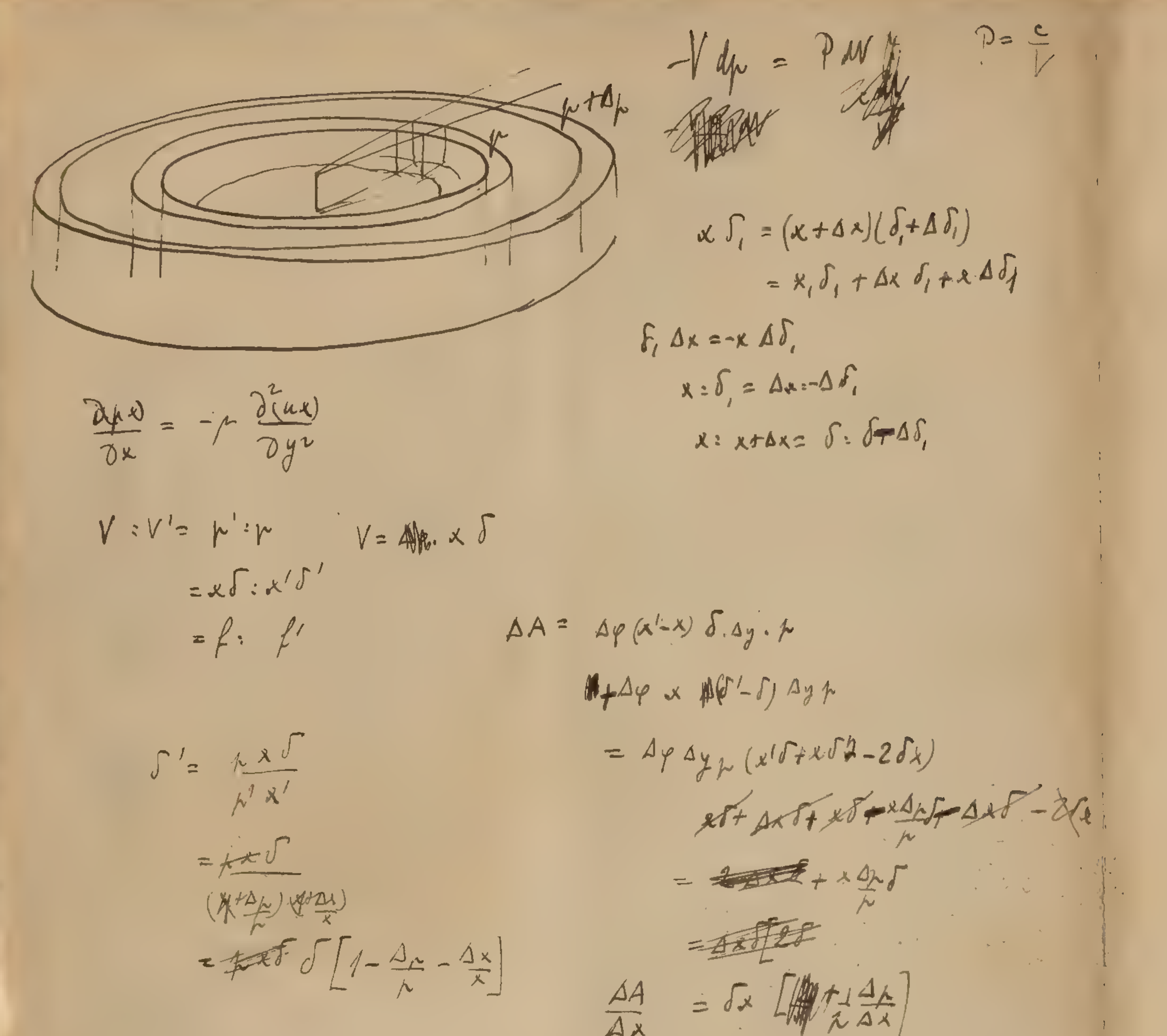
$\frac{\partial(px)}{\partial t}=-e_1\frac{\partial(px)}{\partial x}$

$$\frac{\partial(px)}{\partial t}=-e_1p-e_1x\frac{\partial p}{\partial x}=-e_1p+e_1\mu x\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$
$$=-e_1p+\frac{e_1\mu c_2}{p}$$

$$\frac{c_2\left(\frac{\theta-t}{c}\right)^3}{6px}\left[1+\frac{1}{px}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right]=Acpx-\frac{\theta-t}{c}e_1+aAe_1\frac{\partial(px)}{\partial x}$$

$$c_2=\frac{6px}{\left(\frac{\theta-t}{c}\right)^3}\;\frac{Acpx-\frac{\theta-t}{c}e_1+aAe_1\frac{\partial(px)}{\partial x}}{1+\frac{1}{px}\frac{\partial(px)}{\partial x}}=\frac{p^2}{\mu\log\frac{c_4}{x^2}}$$

$p\,$ [illegible] $\left(c\,e\,c_2\,[illegible]\right)$
$f\,f\,$ [illegible]




$-V\,dp = P\,dV$  $P = \frac{c}{V}$

$x\,\delta_1 = (x+\Delta x)(\delta_1+\Delta\delta_1)$
$= x_1\delta_1 + \Delta x\,\delta_1 + x\,\Delta\delta_1$

$\delta_1\,\Delta x = -x\,\Delta\delta_1$
$x : \delta_1 = \Delta x : -\Delta\delta_1$
$x : x+\Delta x = \delta : \delta-\Delta\delta_1$

$\frac{\partial p\,x}{\partial x} = -\mu\,\frac{\partial^2(ux)}{\partial y^2}$

$V : V' = p' : p$  $V = \ldots x\,\delta$
$= x\delta : x'\delta'$
$= f : f'$

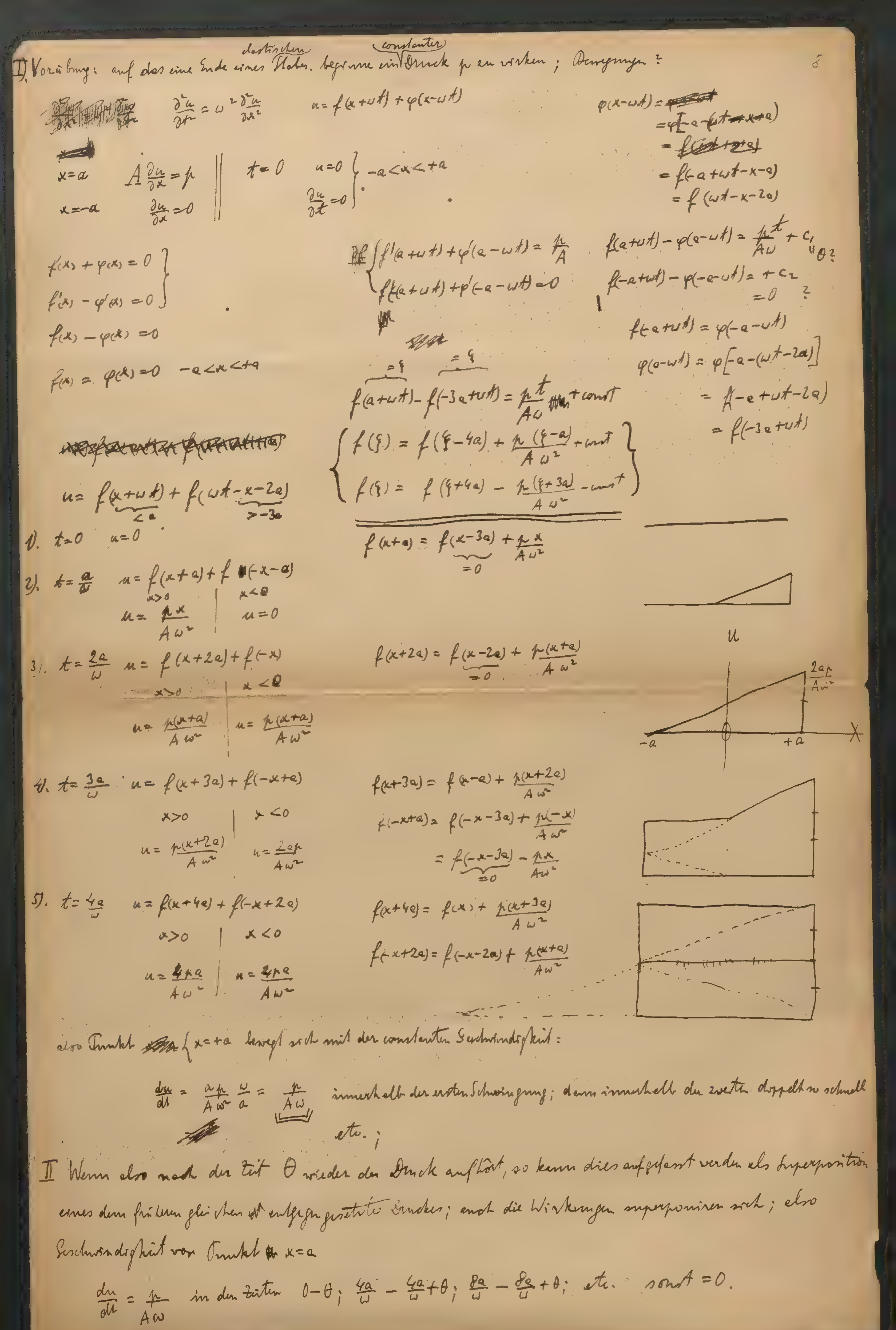
$\Delta A = \Delta\varphi\,(x'-x)\,\delta.\Delta y.\,p$
$\ldots\Delta\varphi\;x\;(\delta'-\delta)\,\Delta y\,p$
$= \Delta\varphi\,\Delta y\,p\,(x'\delta + x\delta' - 2\delta x)$
$\ldots - \delta x$
$= \ldots + x\frac{\Delta p}{p}\delta$

$\delta' = \frac{p\,x\,\delta}{p'\,x'}$
$= \frac{\ldots\delta}{(\ldots+\frac{\Delta p}{p})(\ldots+\frac{\Delta x}{x})}$
$= \ldots\delta\left[1 - \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta x}{x}\right]$

$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \delta x\left[\ldots + \frac{1}{p}\frac{\Delta p}{\Delta x}\right]$

$\Delta A = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta x$

$\frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu\,\frac{\partial u}{\partial y^2}$





I. Vorübung: auf das eine Ende eines elastischen Stabes beginne ein constanter Druck $p$ zu wirken; Bewegung?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u = f(x+\omega t) + \varphi(x-\omega t)$$

$$x=a \quad A\frac{\partial u}{\partial x} = p \qquad\qquad t=0 \quad u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad -a<x<+a$$

$$x=-a \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\varphi(x-\omega t) = \varphi[-a-(\omega t - x + a)] = f(-a+\omega t - x - a) = f(\omega t - x - 2a)$$

$$f(x)+\varphi(x)=0, \quad f'(x)-\varphi'(x)=0$$

$$f(x)-\varphi(x)=0$$

$$f(x)=\varphi(x)=0 \qquad -a<x<+a$$

$$\begin{cases} f'(a+\omega t)+\varphi'(a-\omega t) = \frac{p}{A} \\ f'(-a+\omega t)+\varphi'(-a-\omega t) = 0 \end{cases}$$

$$f(a+\omega t)-\varphi(a-\omega t) = \frac{pt}{A\omega} + c_1 \quad \theta ?$$

$$f(-a+\omega t)-\varphi(-a-\omega t) = +c_2 = 0 \; ?$$

$$f(-a+\omega t) = \varphi(-a-\omega t)$$

$$\varphi(a-\omega t) = \varphi[-a-(\omega t-2a)] = f(-a+\omega t-2a) = f(-3a+\omega t)$$

$$\underbrace{f(a+\omega t)}_{=\xi} - \underbrace{f(-3a+\omega t)}_{=\xi} = \frac{pt}{A\omega} + \text{const}$$

$$\begin{cases} f(\xi) = f(\xi-4a) + \frac{p(\xi-a)}{A\omega^2} + \text{const} \\ f(\xi) = f(\xi+4a) - \frac{p(\xi+3a)}{A\omega^2} - \text{const} \end{cases}$$

$$f(x+a) = \underbrace{f(x-3a)}_{=0} + \frac{px}{A\omega^2}$$

$$u = f(\underbrace{x+\omega t}_{<a}) + f(\underbrace{\omega t - x - 2a}_{>-3a})$$

1). $t=0 \quad u=0$

2). $t=\frac{a}{\omega} \quad u = f(x+a) + f(-x-a)$

| $x>0$ | $x<0$ |
|---|---|
| $u = \frac{px}{A\omega^2}$ | $u=0$ |

3). $t=\frac{2a}{\omega} \quad u = f(x+2a)+f(-x)$

| $x>0$ | $x<0$ |
|---|---|
| $u = \frac{p(x+a)}{A\omega^2}$ | $u = \frac{p(x+a)}{A\omega^2}$ |

$$f(x+2a) = \underbrace{f(x-2a)}_{=0} + \frac{p(x+a)}{A\omega^2}$$

4). $t=\frac{3a}{\omega} \quad u = f(x+3a)+f(-x+a)$

| $x>0$ | $x<0$ |
|---|---|
| $u = \frac{p(x+2a)}{A\omega^2}$ | $u = \frac{2ap}{A\omega^2}$ |

$$f(x+3a) = f(x-a) + \frac{p(x+2a)}{A\omega^2}$$

$$f(-x+a) = f(-x-3a) + \frac{p(-x)}{A\omega^2} = \underbrace{f(-x-3a)}_{=0} - \frac{px}{A\omega^2}$$

5). $t=\frac{4a}{\omega} \quad u = f(x+4a)+f(-x+2a)$

| $x>0$ | $x<0$ |
|---|---|
| $u = \frac{4pa}{A\omega^2}$ | $u = \frac{2pa}{A\omega^2}$ |

$$f(x+4a) = f(x) + \frac{p(x+3a)}{A\omega^2}$$

$$f(-x+2a) = f(-x-2a) + \frac{p(x+a)}{A\omega^2}$$

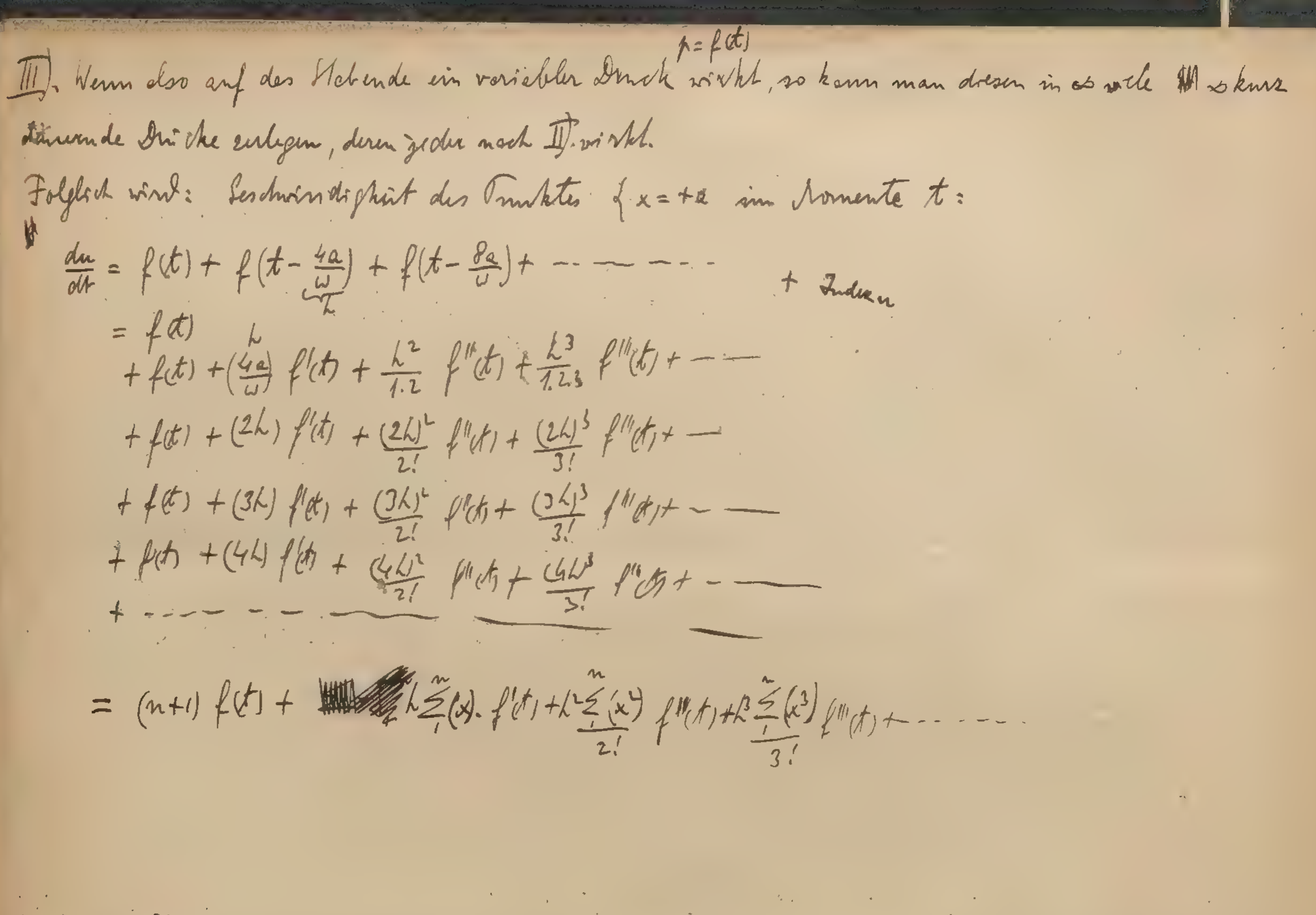


also Punkt $x=+a$ bewegt sich mit der constanten Geschwindigkeit:

$$\frac{du}{dt} = \frac{ap}{A\omega^2}\frac{\omega}{a} = \frac{p}{A\omega}$$ innerhalb der ersten Schwingung; dann innerhalb der zweiten doppelt so schnell etc.;

II Wenn also nach der Zeit $\theta$ wieder der Druck aufhört, so kann dies aufgefasst werden als Superposition eines dem früheren gleichen entgegengesetzten Druckes; auch die Wirkungen superponiren sich; also Geschwindigkeit von Punkt $x=a$

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{A\omega}$$ in den Zeiten $0-\theta$; $\frac{4a}{\omega} - \frac{4a}{\omega}+\theta$; $\frac{8a}{\omega} - \frac{8a}{\omega}+\theta$; etc. sonst $=0$.



III. Wenn also auf das Stabende ein variabler Druck $p=f(t)$ wirkt, so kann man diesen in so viele kurz dauernde Drücke zerlegen, deren jeder nach II. wirkt.

Folglich wird: Geschwindigkeit des Punktes $\{x=+a$ im Momente $t$:

$$\frac{du}{dt} = f(t) + f\left(t-\frac{4a}{\omega}\right) + f\left(t-\frac{8a}{\omega}\right) + \cdots \quad + \text{Indices}$$

$$= f(t)$$
$$+ f(t) + \left(\frac{4a}{\omega}\right) f'(t) + \frac{h^2}{1.2} f''(t) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(t) + \cdots$$
$$+ f(t) + (2h) f'(t) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(t) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(t) + \cdots$$
$$+ f(t) + (3h) f'(t) + \frac{(3h)^2}{2!} f''(t) + \frac{(3h)^3}{3!} f'''(t) + \cdots$$
$$+ f(t) + (4h) f'(t) + \frac{(4h)^2}{2!} f''(t) + \frac{(4h)^3}{3!} f'''(t) + \cdots$$
$$+ \cdots$$

$$= (n+1) f(t) + h\sum_1^n(\alpha)\cdot f'(t) + h^2 \frac{\sum_1^n(\alpha^2)}{2!} f''(t) + h^3 \frac{\sum_1^n(\alpha^3)}{3!} f'''(t) + \cdots$$

IV. Ein Stab in Luft mit kreisförmigen Endflächen bekommt im Zeitpunkte $t=0$ die Geschwindigkeiten $c$, in der Richtung der Achse senkrecht auf eine feste Wand.

Anfangsentfernung der Flächen $= \varepsilon$

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{B}{\alpha^3}\frac{d\alpha}{dt} \qquad m_1\frac{dx_1}{dt} = -\frac{B}{2\alpha^2} + \text{const}$$

$$m_1 c_1 = -\frac{B}{2\varepsilon^2} + \text{const}$$

$$m_1\frac{dx_1}{dt} = -\frac{B}{2\alpha^2} + \frac{B}{2\varepsilon^2} + m_1 c_1$$

Innerhalb der ersten Schwingungsdauer:

$$v = c + \frac{1}{A\omega}\frac{v}{\alpha^3}\cdot B \qquad v = -\frac{d\alpha}{dt}$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} = c + \frac{B}{A\omega}\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{2\,dt}$$

$$-\alpha = ct + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} + \text{const}$$

$$\alpha = \text{const} - ct + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\varepsilon = \text{const} + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$v\left[1+\frac{B}{A\omega\alpha^3}\right] = c$$

$$c\frac{d\alpha}{dt} = \frac{A\omega\alpha^3}{B + A\omega\alpha^3}$$

$$ct = \text{const} - \alpha + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2}$$

$$c\frac{dt}{d\alpha} = -1 - \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^3} = 0$$

$$A\omega\alpha^3 = -B \qquad \alpha = -\sqrt[3]{\frac{B}{A\omega}}$$

$$c\frac{d^2t}{d\alpha^2} = +\frac{3B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^4}$$

$\alpha = -\sqrt[3]{\frac{B}{A\omega}}$ $\qquad$ $\alpha = \sqrt[3]{\frac{B}{A\omega}}$ $\qquad \alpha \qquad \infty$

also, falls die Schwingung des Stabes nicht reflectirt würde, würde die Endfläche desselben sich asymptotisch ($t=\infty$) an die andere Fläche annähern; in Wirklichkeit muss nach einer gewissen Zeit die reflektirte Schwing. zurückkommen.

$+\frac{xp}{hp}$

$\alpha = x - \frac{ct - C}{3}$

$\alpha^3 + (ct - C)\alpha^2 = \frac{B}{2Aw}$

$x^3 - x^2(ct - C) + \frac{x(ct-C)^2}{3} - \frac{(ct-C)^3}{27}$

$x^2(ct - C) - \frac{2}{3}x(ct-C)^2 + \frac{(ct-C)^3}{9} = \frac{B}{2Aw}$

$x^3 - \frac{x}{3}(ct - C)^2 + \frac{2(ct-C)^3}{27} = \frac{B}{2Aw}$

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\phantom{x}}}$

$v$

falsch?!

Innerhalb der zweiten Schwingungsdauer:

$v = c - \frac{B}{Aw}\frac{v}{\alpha^3} - \frac{B}{Aw}\frac{v_{t-\tau}}{\alpha^3_{t-\tau}}$

$= c - v_{t-\tau}$

$\alpha^3 = (\text{const} - ct)\alpha^2 + \frac{B}{2Aw}$

$+\frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha^2} = (ct - \text{const} + \alpha)$

$\alpha^2 = \frac{B}{2Aw(ct - \text{const} + \alpha)}$

$\alpha^3 = \frac{(\text{const} - ct)B}{2Aw(ct - \text{const} + \alpha)} + \frac{B}{2Aw}$

$= \frac{B}{2Aw}\left[1 + 2\frac{1}{-1 + \frac{\alpha}{\text{const} - ct}}\right]$

$c\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\frac{B}{2}\frac{\alpha}{ct + \alpha - \dots}}{B + \frac{B}{2}\frac{\alpha}{\dots}} = \frac{\alpha}{2ct + 2\alpha - 2\text{const} + \alpha}$

$= \frac{\alpha}{2(ct - \text{const}) + 3\alpha}$

$\alpha^3 = \frac{B}{2Aw}\frac{\alpha}{ct + \alpha - \text{const}}$

$\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} = \frac{1}{\alpha^2} - \tau\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} - -$

$\alpha_0^3 = (\text{const} - ct)\alpha_0^2 + \frac{B}{2Aw}$

$(\alpha_0 - \Delta)^3 = (\text{const} - ct + c\tau)(\alpha_0 - \Delta)^2 + \frac{B}{2Aw}$

$-3\alpha_0^2\Delta + 3\alpha_0\Delta^2 - \Delta^3 = (\text{const} - ct + c\tau)(-2\alpha_0\Delta + \Delta^2) + c\tau\alpha_0^2$

$-\frac{d\alpha}{dt} = c + \frac{B}{Aw}\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\alpha^3} + \frac{B}{Aw}\left(\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\alpha^3}\right)_{t-\tau} = c - \frac{B}{2Aw}\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} - \frac{B}{2Aw}\left(\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt}\right)_{t-\tau}$

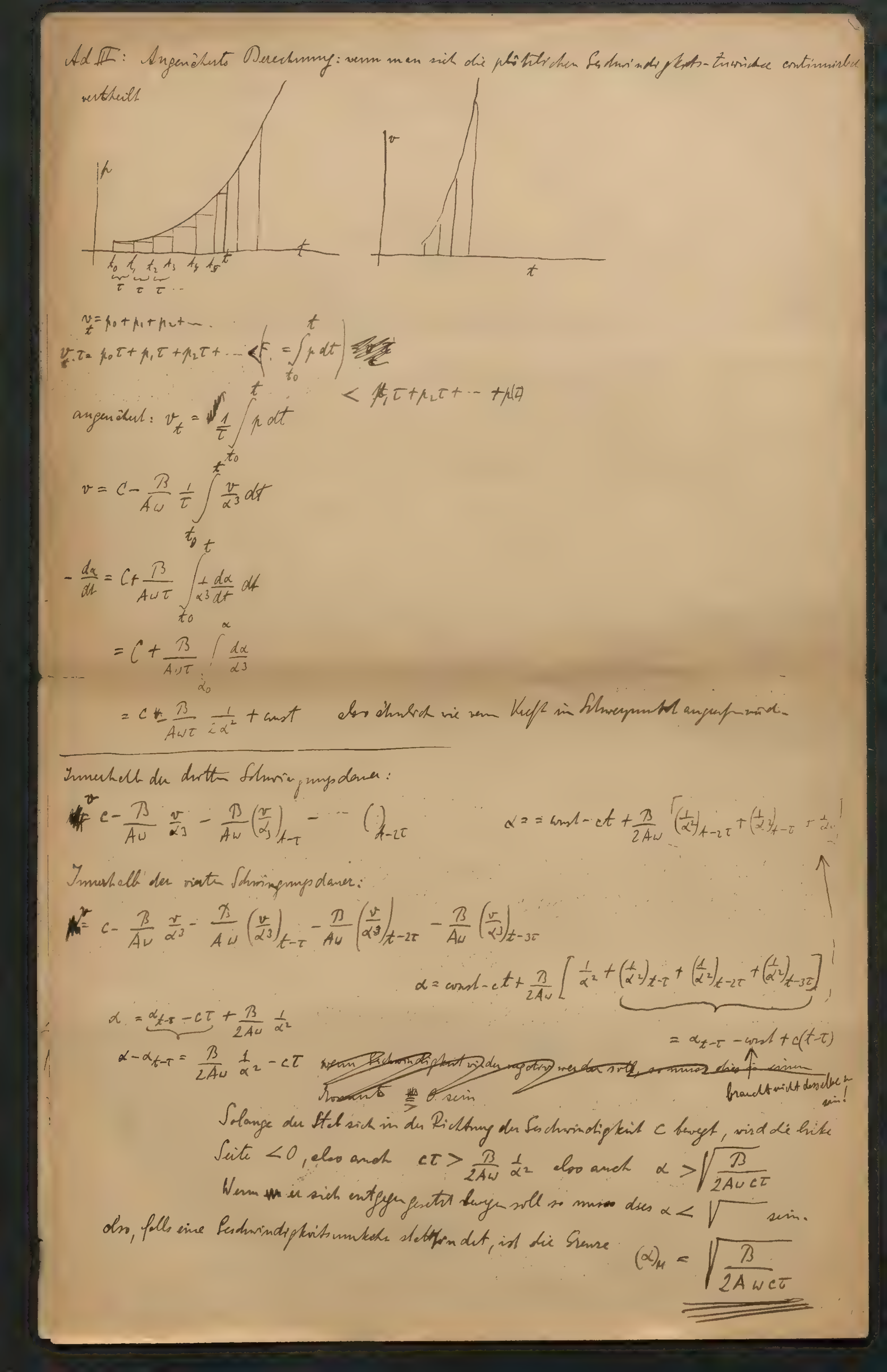
$= \frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} - \tau\frac{d^2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt^2} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^3\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt^3} + -$

$-\alpha = ct - \frac{B}{2Aw}\left\{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} - \tau\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt^2} - + - \dots\right\}$

$\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau}$

$= ct - \frac{B}{2Aw}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \frac{1}{\alpha^2}\right]$

$\alpha = \text{const} - ct + \frac{B}{2Aw}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \frac{1}{\alpha^2}\right]$



Ad III: Angenäherte Berechnung: wenn man sich die plötzlichen Geschwindigkeits-Zuwächse continuirlich vertheilt



$$\frac{v}{t} = p_0 + p_1 + p_2 + \dots$$

$$\frac{v}{t}\cdot\tau = p_0\tau + p_1\tau + p_2\tau + \dots < \left(F. = \int_{t_0}^{t} p\,dt\right) < p_1\tau + p_2\tau + \dots + p(t)$$

angenähert: $$v_t = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} p\,dt$$

$$v = C - \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t}\frac{v}{\alpha^3}\,dt$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} = C + \frac{B}{A\omega\tau}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha^3}\frac{d\alpha}{dt}\,dt$$

$$= C + \frac{B}{A\omega\tau}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha^3}$$

$$= C \mp \frac{B}{A\omega\tau}\frac{1}{2\alpha^2} + \text{const}$$ also ähnlich wie wenn Kraft im Schwerpunkt angreifen würde.

---

Innerhalb der dritten Schwingungsdauer:

$$v = C - \frac{B}{A\omega}\frac{v}{\alpha^3} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-\tau} - \dots \left(\;\right)_{t-2\tau}$$

$$\alpha = \text{const} - ct + \frac{B}{2A\omega}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-2\tau} + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

Innerhalb der vierten Schwingungsdauer:

$$v = C - \frac{B}{A\omega}\frac{v}{\alpha^3} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-\tau} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-2\tau} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-3\tau}$$

$$\alpha = \text{const} - ct + \frac{B}{2A\omega}\left[\frac{1}{\alpha^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-2\tau} + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-3\tau}}\right]$$

$$= \alpha_{t-\tau} - \text{const} + c(t-\tau)$$

$$\alpha = \alpha_{t-\tau} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha - \alpha_{t-\tau} = \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} - c\tau$$ ~~wenn Geschwindigkeit wieder umgekehrt werden soll, so muss dies in einem Momente ≧ 0 sein~~ braucht nicht dieselbe zu sein!

Solange der Stab sich in der Richtung der Geschwindigkeit $c$ bewegt, wird die linke Seite $< 0$, also auch $c\tau > \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2}$ also auch $\alpha > \sqrt{\frac{B}{2A\omega c\tau}}$

Wenn er sich entgegengesetzt bewegen soll so muss das $\alpha < \sqrt{\phantom{x}}$ sein.

also, falls eine Geschwindigkeitsumkehr stattfindet, ist die Grenze $$(\alpha)_H = \sqrt{\frac{B}{2A\omega c\tau}}$$

$$\sum_n A_n \cos\alpha_n t \cos\beta_n x + \sum A'_n \cos\alpha'_n t \cos\beta'_n(\lambda+\lambda'-x) = w$$

$$\int \sum A_n \cos\beta_n y + \sum A'_n \cos\beta'_n(\lambda+\lambda'-y) = \int f(y)\cos\beta_m y$$

$$A_n \int_0^\lambda \cos^2 \beta_n y\, dy = \quad = A_n \int_0^\lambda \frac{1+\cos 2\beta_n y}{2} dy = A_n \frac{\lambda}{2}$$

$$\alpha = c\beta$$

$$\beta = \frac{n\pi}{\lambda+\lambda'} \qquad \alpha = \frac{n}{2\pi}$$

$$\frac{n\alpha}{\lambda+\lambda'} =$$

$$\sum_1^\infty A_n \cos\frac{n\pi c t}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\frac{n^2\pi^2c^2}{a^2} + \sum A'_n \cos\frac{n\pi c' t}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\frac{n^2\pi^2c'^2}{a^2} =$$

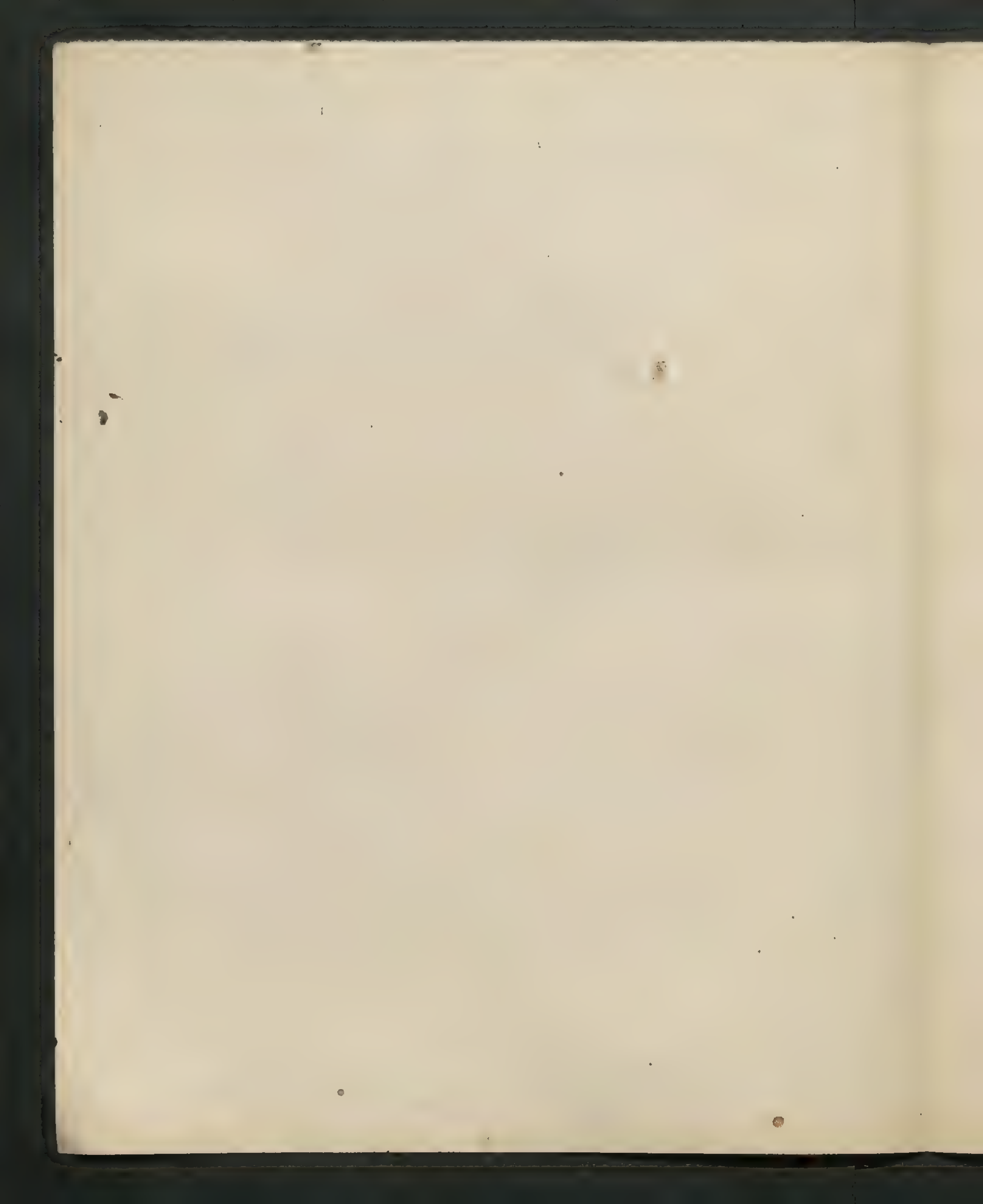
$$= c^2\left\{\sum_1^\infty A_n \cos\frac{n\pi c t}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \sum_1^\infty A'_n \cos\frac{n\pi c' t}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right\}$$

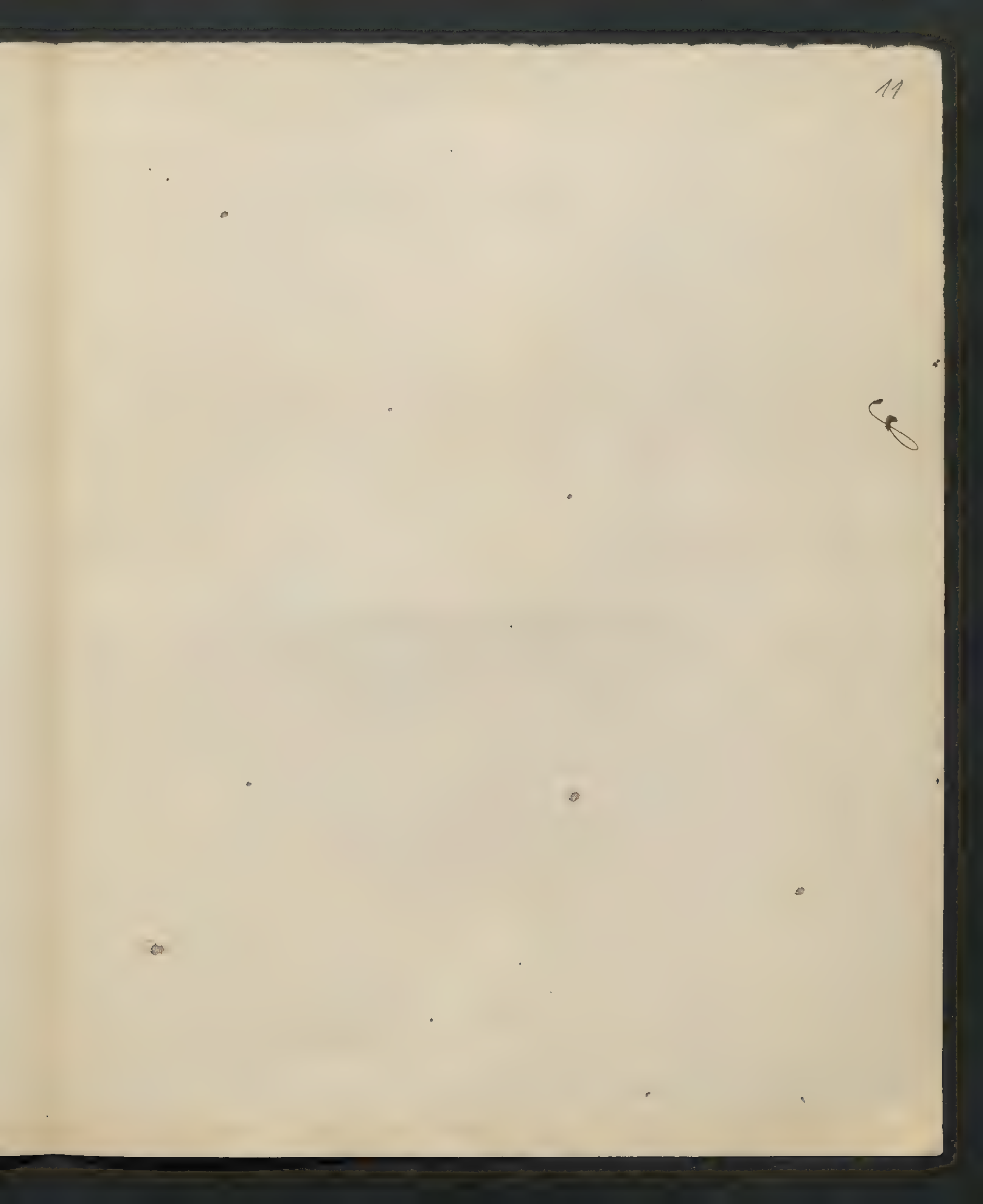
$$w = \sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{a}\left(A_n \cos\frac{n\pi c t}{a} + A'_n \cos\frac{n\pi c' t}{a}\right)$$

$$\frac{n\pi c}{a} t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$t = \frac{a}{2nc}, \frac{3a}{2nc}, \ldots$$

[illegible]





$$u = A_1 \cos\alpha_1 t \cos\beta_1 x + A_2 \cos\alpha_2 t \cos\beta_2 x + A_3 \cos\alpha_3 t \cos\beta_3 x + \cdots$$

$$u' = A_1' \cos\alpha_1' t \cos\beta_1'(\lambda+\lambda'-x) + A_2' \cos\alpha_2' t \cos\beta_2'(\lambda+\lambda'-x) + \cdots$$

$A' = A \frac{\cos \beta \lambda}{\cos \beta' \lambda'}$

$$u = A_1 U_1 \cos\alpha_1 t + A_2 U_2 \cos\alpha_2 t + \cdots = \sum A_n U_n \cos\alpha_n t + C_n$$

$$u' = A_1 U_1' \cos\alpha_1 t + A_2 U_2' \cos\alpha_2 t + \cdots = \sum A_n U_n' \cos\alpha_n t$$

$t = 0$:

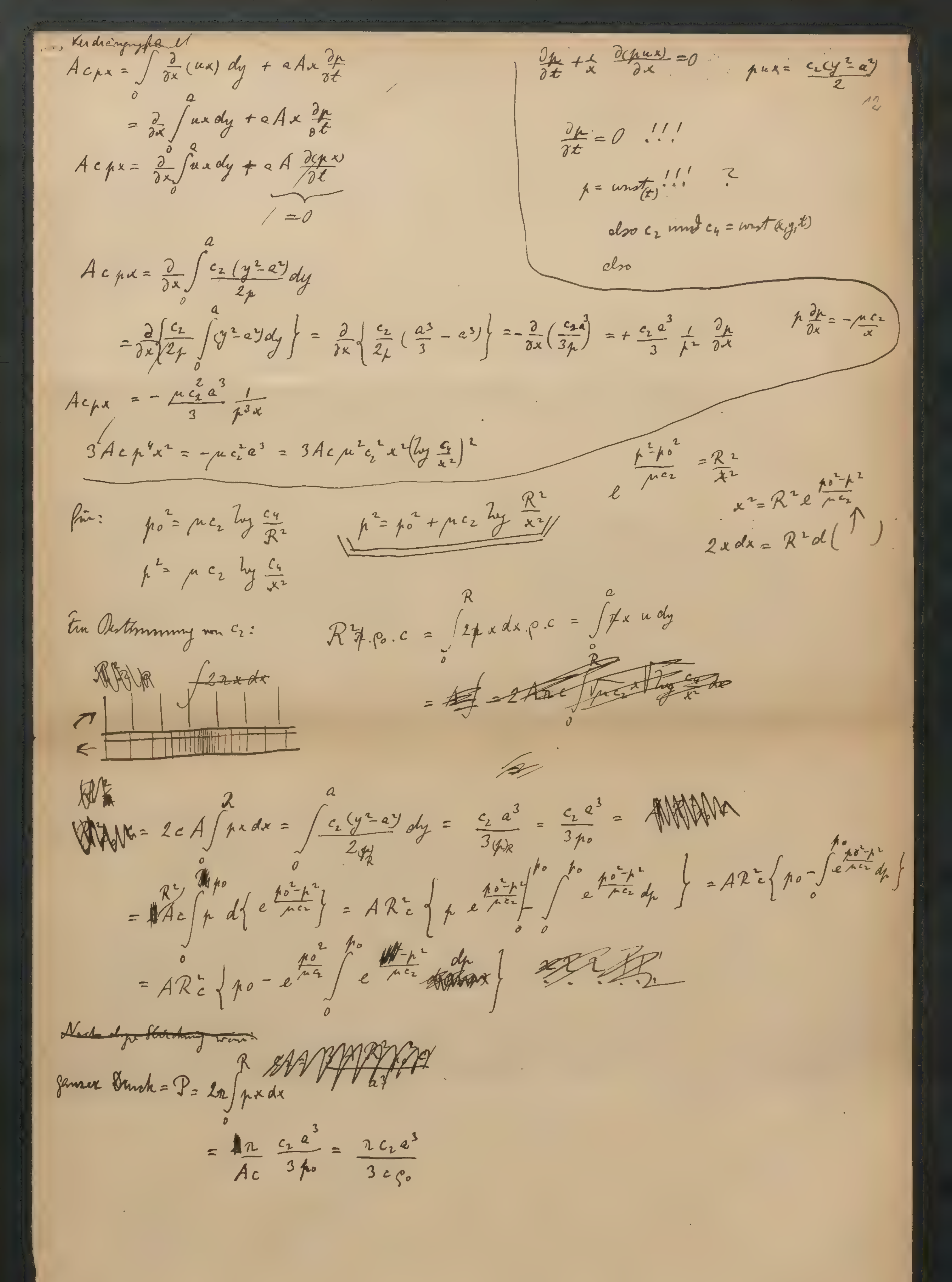
$$\left.\begin{array}{l} u = f(x) \\ \frac{du}{dt} = F(x) \end{array}\right\} 0 < x < x_1 \qquad \left.\begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ \frac{du'}{dt} = \Phi(x) \end{array}\right\} x_1 < x < l$$

$$f(x) = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \cdots \qquad \varrho\, U_n\, dx \qquad F(x) = A_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} + \cdots$$

$$\varphi(x) = A_1 U_1' + A_2 U_2' + \cdots \qquad \varrho' U_n\, dx \qquad \Phi(x) = A_1 \frac{\partial U_1'}{\partial t} + \cdots$$

$$E\varrho \int_0^{x_1} U_n f(x)\, dx + E'\varrho' \int_{x_1}^{l} U_n' \varphi(x)\, dx = A_n \left[ E\varrho \int_0^{x_1} (U_n)^2 dx + E'\varrho' \int_{x_1}^{l} (U_n')^2 dx \right]$$

$$\varrho \int_0^{x_1} U$$





$$Ac\,p\,x = \int_0^a \frac{\partial}{\partial x}(ux)\,dy + aAx\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^a ux\,dy + aAx\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$Ac\,p\,x = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^a ux\,dy + aA\underbrace{\frac{\partial(px)}{\partial t}}_{=0}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial(pux)}{\partial x} = 0 \qquad pux = \frac{c_2(y^2-a^2)}{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad !!!$$

$p = \text{const}_{(t)}$ !!! ?

also $c_2$ und $c_4 = \text{const}\,(x,y,t)$

also

$$Ac\,p\,x = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^a \frac{c_2(y^2-a^2)}{2p}\,dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c_2}{2p}\int_0^a (y^2-a^2)\,dy\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c_2}{2p}\left(\frac{a^3}{3}-a^3\right)\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_2a^3}{3p}\right) = +\frac{c_2a^3}{3}\frac{1}{p^2}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$p\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu c_2}{x}$$

$$Ac\,p\,x = -\frac{\mu c_2^2 a^3}{3}\frac{1}{p^3 x}$$

$$3Ac\,p^4x^2 = -\mu c_2^2 a^3 = 3Ac\,\mu^2c_2^2x^2\left(\lg\frac{c_4}{x^2}\right)^2$$

$$e^{\frac{p^2-p_0^2}{\mu c_2}} = \frac{R^2}{x^2}$$

$$x^2 = R^2 e^{\frac{p_0^2-p^2}{\mu c_2}}$$

$$2x\,dx = R^2\,d(\uparrow)$$

Für: $p_0^2 = \mu c_2 \lg\frac{c_4}{R^2}$

$p^2 = \mu c_2 \lg\frac{c_4}{x^2}$

$$p^2 = p_0^2 + \mu c_2 \lg\frac{R^2}{x^2}$$

Zur Bestimmung von $c_2$:

$$R^2\pi\cdot p_0\cdot c = \int_0^R 2\pi x\,dx\cdot p\cdot c = \int_0^a \pi x\,u\,dy$$

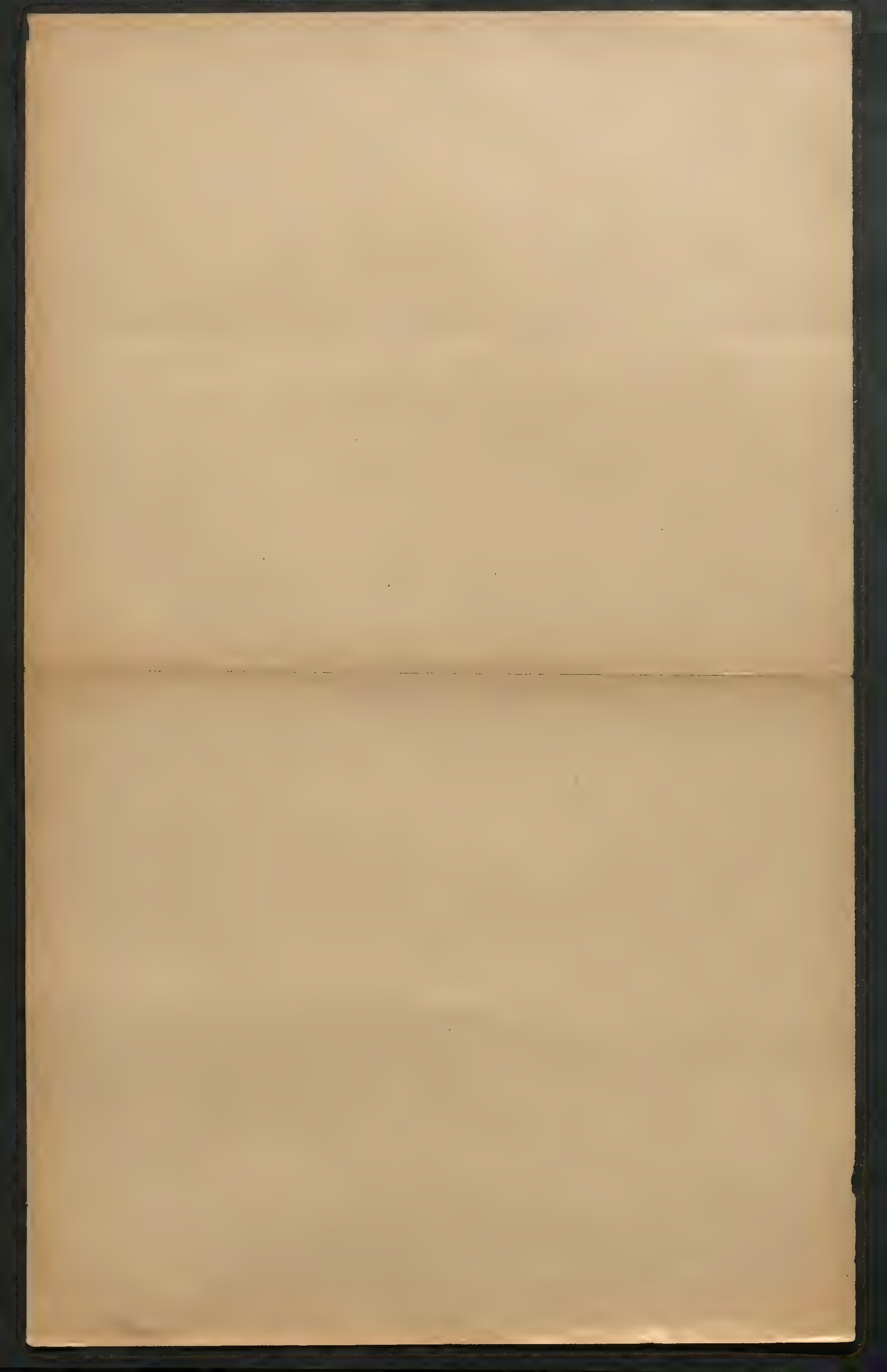
$$2cA\int_0^R px\,dx = \int_0^a \frac{c_2(y^2-a^2)}{2p_R}\,dy = \frac{c_2a^3}{3(p)_R} = \frac{c_2a^3}{3p_0}$$

$$= \frac{R^2}{2}Ac\int_0^{p_0} p\,d\left\{e^{\frac{p_0^2-p^2}{\mu c_2}}\right\} = AR^2c\left\{p\,e^{\frac{p_0^2-p^2}{\mu c_2}}\Big|_0^{p_0} - \int_0^{p_0} e^{\frac{p_0^2-p^2}{\mu c_2}}\,dp\right\} = AR^2c\left\{p_0 - \int_0^{p_0} e^{\frac{p_0^2-p^2}{\mu c_2}}\,dp\right\}$$

$$= AR^2c\left\{p_0 - e^{\frac{p_0^2}{\mu c_2}}\int_0^{p_0} e^{-\frac{p^2}{\mu c_2}}\,dp\right\}$$

gesamter Druck $= P = 2\pi\int_0^R px\,dx$

$$= \frac{\pi}{Ac}\frac{c_2a^3}{3p_0} = \frac{\pi c_2 a^3}{3c\rho_0}$$



Annäherung: $v = 0$

$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 \qquad a = fc(x,t)$

$p = fc(x,t) = b_0 - 2\mu \int a_2 dx$

I) $\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

II) $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

III) $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial (p u x)}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial III}{\partial y}$: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial p}{\partial y} u x + p \frac{\partial u x}{\partial y}\right\} = 0$

$p \frac{\partial (u x)}{\partial y} = p x \frac{\partial u}{\partial y} = \text{const}_x = fc(y,t)$

$= C_1$

$u = \int \frac{c_1}{p x} dy + fc(x,t)$

$= \frac{1}{p x} \int c_1 dy + fc(x,t)$

$u = \frac{1}{p x} \int c_1 dy + e_1$

$\frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial p x}{\partial y} + p x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$= -\frac{1}{\mu} p x \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-x}{2\mu} \frac{\partial (p^2)}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial c_1}{\partial y} = fc(x,t) = c_2$

$c_1 = c_2 y + c_3 \quad \| c_2, c_3 = fc(x,t)$

weil $c_1$ aber blos $fc(y,t)$ ist und $y$ beliebig so ist $c_2$ und $c_3$ blos $fc(t)$ also:

$c_1 = c_2 y + c_3 \qquad c_2, c_3 = fc(t)$

$u = \frac{1}{p x}\left\{\frac{c_2 y^2}{2} + c_3 y\right\} + e_1$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{p x}\{c_2 y + c_3\}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{c_2}{p x}$

$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\mu c_2}{p x} = \frac{\partial p}{\partial x}$

$-\mu c_2 \frac{dx}{x} = p\, dp$

$c - \mu c_2 \log x = \frac{p^2}{2}$

$p^2 = \text{const} - 2\mu c_2 \log x$

$= 2\mu c_2 \left\{\frac{\text{const}}{\mu c_2} - \log x\right\}$

$- \log \text{const}'\, x$

$= -\mu c_2 \log \text{const}''\, x^2.$

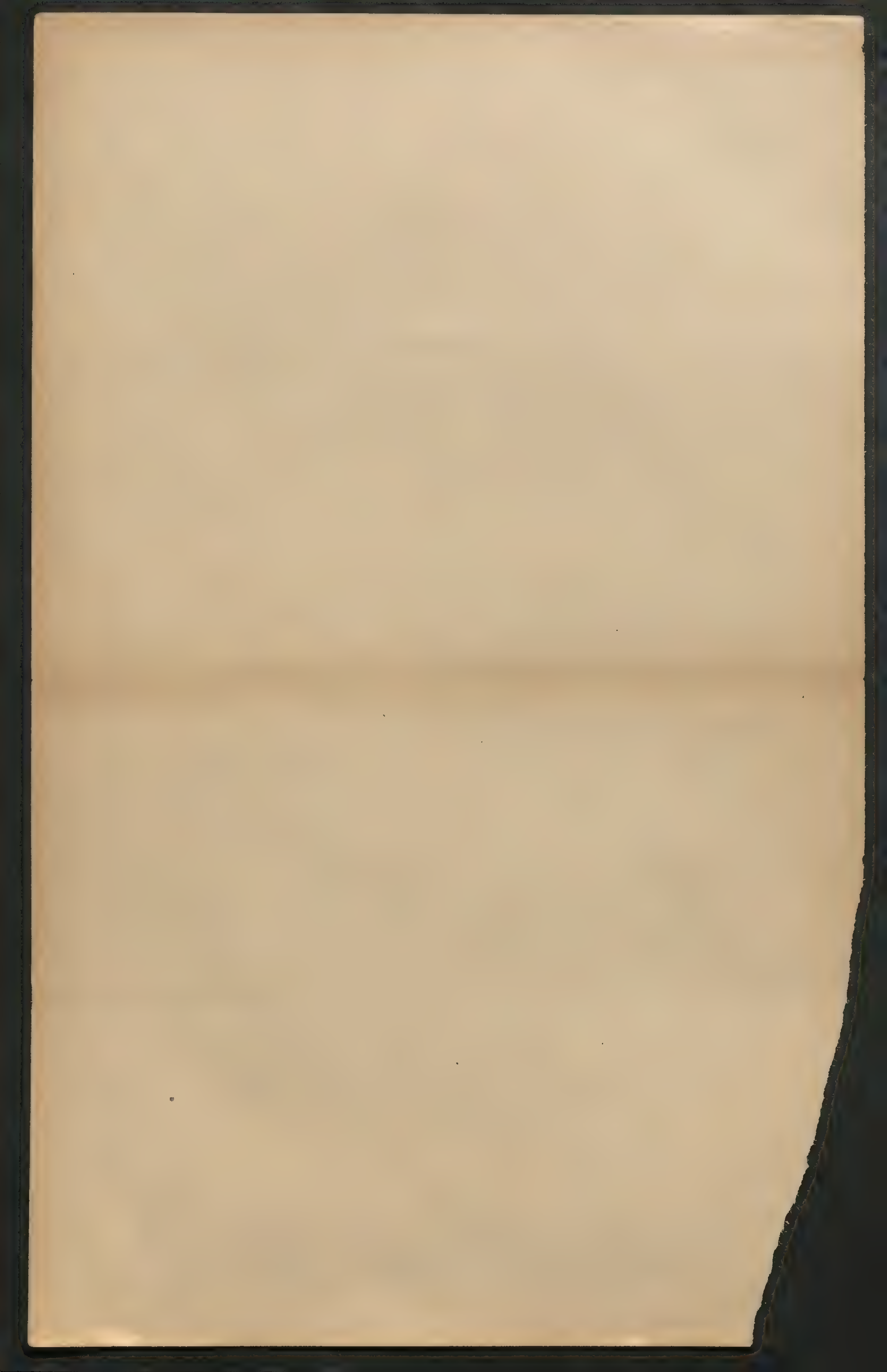
$p^2 = \mu c_2 \log \frac{c_4}{x^2} \qquad c_2, c_4 = fc(t)$ wird $= \infty$ für $x = 0$; bei obiger Annahme selbstverständlich

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{p x^2}\left\{\frac{c_2 y^2}{2} + c_3 y\right\} + \frac{\partial e_1}{\partial x} - \frac{1}{p^2 x}$

$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 = \frac{\partial (p x)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + p x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial (p x)}{\partial x} \frac{c_2 y + c_3}{p x} + \frac{p x}{(p x)} \frac{\partial p x}{\partial x}$

$\frac{\partial (p x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \Big/ \frac{\partial u}{\partial y}$

$\log p x$



$$\frac{d(\alpha+2u_1)}{dt} = -\frac{B}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{1}{\alpha^2}+c_2-c_1$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+2\frac{d^2u_1}{dt^2} = -\frac{B}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{d(\frac{1}{\alpha^2})}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+2\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=l_1} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}A_1\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l_1}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}A_1\left[f'(l_1+\omega t)+f'(-3l_1+\omega t)\right]-2\omega^2\left[f''(l_1+\omega t)+f''(-3l_1+\omega t)\right]$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{A_1}{\omega}\left[f(l_1+\omega t)+f(-3l_1+\omega t)\right]-2\omega\left[f'(l_1+\omega t)+f(-3l_1+\omega t)\right]+c_2-c_1$$

$$\alpha = \frac{m_1 m_2}{}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2}-\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2u_1}{dt^2}\Big|_{l_1} - \frac{d^2u_2}{dt^2}\Big|_{l_2}$$

$$=$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = +\frac{1}{2}\frac{2}{1-x^2} = +\frac{1}{1-x^2}$$

$$-1+\frac{1}{1-x^2} = +\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\lg\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$A_1 \left\{ f'(l_1+\omega t) + \varphi(l_1-\omega t) \right\} = -\frac{B_1}{2} \frac{d(\frac{1}{\alpha^2})}{dt} \qquad f(-l_1+\omega t)+\varphi(-l_1-\omega t)=0$$

$$A_1 \int\left\{ \qquad \right\} dt = -\frac{B_1}{2}\frac{1}{\alpha^2}$$

$$A_1 \left\{ \frac{f(l_1+\omega t)}{\omega} - \frac{\varphi(l_1-\omega t)}{\omega} \right\} = -\frac{B_1 \omega}{2\alpha^2} + const \qquad f(-l_1+\omega t)-\varphi(-l_1-\omega t) = const$$

$$f(-l_1+\omega t) = \varphi(-l_1-\omega t)$$

$$= const + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left\{\frac{d(\alpha+u_1+u_2)}{dt} + c_1 - c_2\right\}$$

$$A_1\{$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_2$$

$$f'(l_1+\omega t)+\varphi(l_1-\omega t) = F'(l_2+\omega t)+\Phi(l_2-\omega t)$$

$$f'(l_1+\omega t) + f'(-3l_1+\omega t) = F'(l_2+\omega t)+F'(-3l_2+\omega t)$$

$$\underbrace{f(l_1+\omega t) + f(-3l_1+\omega t)}_{u_1} = \underbrace{F(l_2+\omega t)+F(-3l_2+\omega t)}_{u_2} + \phi$$

$$u_1 = u_2 \; ! \; ?$$

$$\frac{d(\alpha+2u_1)}{dt} = -\frac{B(m_1+m_2)}{2m_1 m_2}\frac{1}{\alpha^2} + c_2 - c_1$$

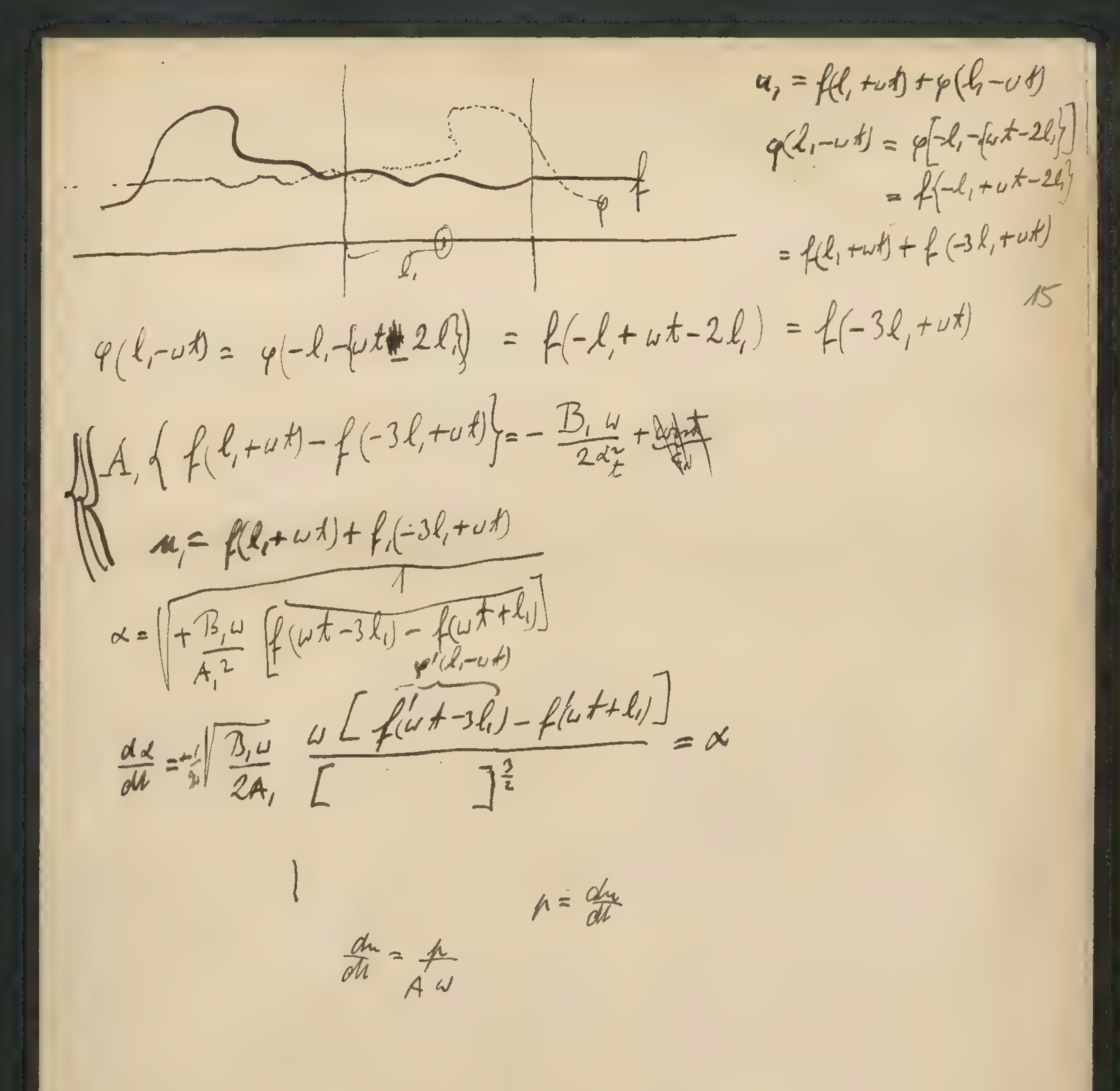
$$= \frac{(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\frac{A_1}{\omega}\left[f(l_1+\omega t) - f(-3l_1+\omega t)\right] + c_2 - c_1$$

$$\alpha + 2u_1 = \frac{A_1}{\omega}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$$

$$\sqrt{\frac{B_1\omega}{2A_1}\frac{1}{f(\omega t-3l_1)-f(\omega t+l_1)}} + 2\left\{f(l_1+\omega t)+f(-3l_1+\omega t)\right\} = \frac{A_1}{\omega}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\int\left[f(l_1+\omega t)-f(-3l_1+\omega t)\right]dt + c_2 - c_1$$

$$f(\omega t+l_1) = \alpha \qquad \int f(\omega t+l_1)\,dt = \int \alpha$$

$$\alpha' = \omega\, dt\, f'(\omega t+l_1)$$



u₁ = f(l₁+ωt) + φ(l₁−ωt)
φ(l₁−ωt) = φ[−l₁−{ωt−2l₁}]
= f{−l₁+ωt−2l₁}
= f(l₁+ωt) + f(−3l₁+ωt)
15
φ(l₁−ωt) = φ(−l₁−{ωt−2l₁}) = f(−l₁+ωt−2l₁) = f(−3l₁+ωt)
A₁{f(l₁+ωt) − f(−3l₁+ωt)} = − B₁ω / 2α²
u₁ = f(l₁+ωt) + f₁(−3l₁+ωt)
α = √(+ B₁ω / A₁² [f(ωt−3l₁) − f(ωt+l₁)])
φ′(l₁−ωt)
dα/du = ±½ √(B₁ω / 2A₁) · ω[f′(ωt−3l₁) − f(ωt+l₁)] / [ ]^{3/2} = α
p = du/dt
du/dt = p / Aω

$$u_1 = a_1 + \frac{b_1}{t} + \frac{c_1}{t^2}$$

$$u_2 = a_2 + \frac{b_2}{t} + \frac{c_2}{t^2}$$

$$a_1 = M_1 x + N_1 \qquad a_2 = M_1' x + N_1'$$

$$b_1 = M_2 x + N_2 \qquad —$$

$$c_1 = M_3 x + N_3 \qquad - - -$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=-l_1} = 0$$

$$M_1 + \frac{M_2}{t} + \frac{M_3}{t^2} = 0$$

$$M_1' + \frac{M_2'}{t} + \frac{M_3'}{t^2} = 0$$

$A_4$

$$A_1 \left\{ \frac{\partial b_1}{\partial x} \lg t - \frac{\partial c_1}{\partial x} \frac{1}{t} - \frac{\partial d_1}{\partial x} \frac{1}{2t^2} - \frac{\partial e_1}{\partial x} \frac{1}{3t^3} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{1}{4t^4} - \right\}$$

$$= - \frac{B}{2\alpha^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} - \left\{ \frac{b_1 + b_2}{t^2} + 2 \frac{c_1 + c_2}{t^3} + 3 \frac{d_1 + d_2}{t^4} + \cdots \right\} =$$

$$= c_2 - c_1 + \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} A_1 \left\{ \frac{\partial b_1}{\partial x} \lg t + - \frac{\partial c_1}{\partial x} \frac{1}{t} - \frac{\partial d_1}{\partial x} \frac{1}{2t^2} - \cdots \right\}$$

$x = l_1$

16

$$\frac{d^2(\alpha + u_1 + u_2)}{dt^2} = -\frac{B(m_1+m_2)}{2 m_1 m_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=l_1}$$

$$d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{2A_1}{B_1} dt \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\Big|^{x=l_1}$$

$$= \text{const}_x$$
$$= \text{variable}_t$$
$$= \varphi(t)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} = -\frac{2A_1}{B_1}\int \varphi(t)\,dt$$

$$d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{2A_1}{B_1}\varphi(t)\,dt$$

$$\alpha = \left[-\frac{B_1}{2A_1}\frac{1}{\int\varphi(t)\,dt}\right]^{+\frac{1}{2}} = \sqrt{-\frac{B_1}{2A_1}}\frac{1}{\sqrt{\int\varphi(t)\,dt}}$$

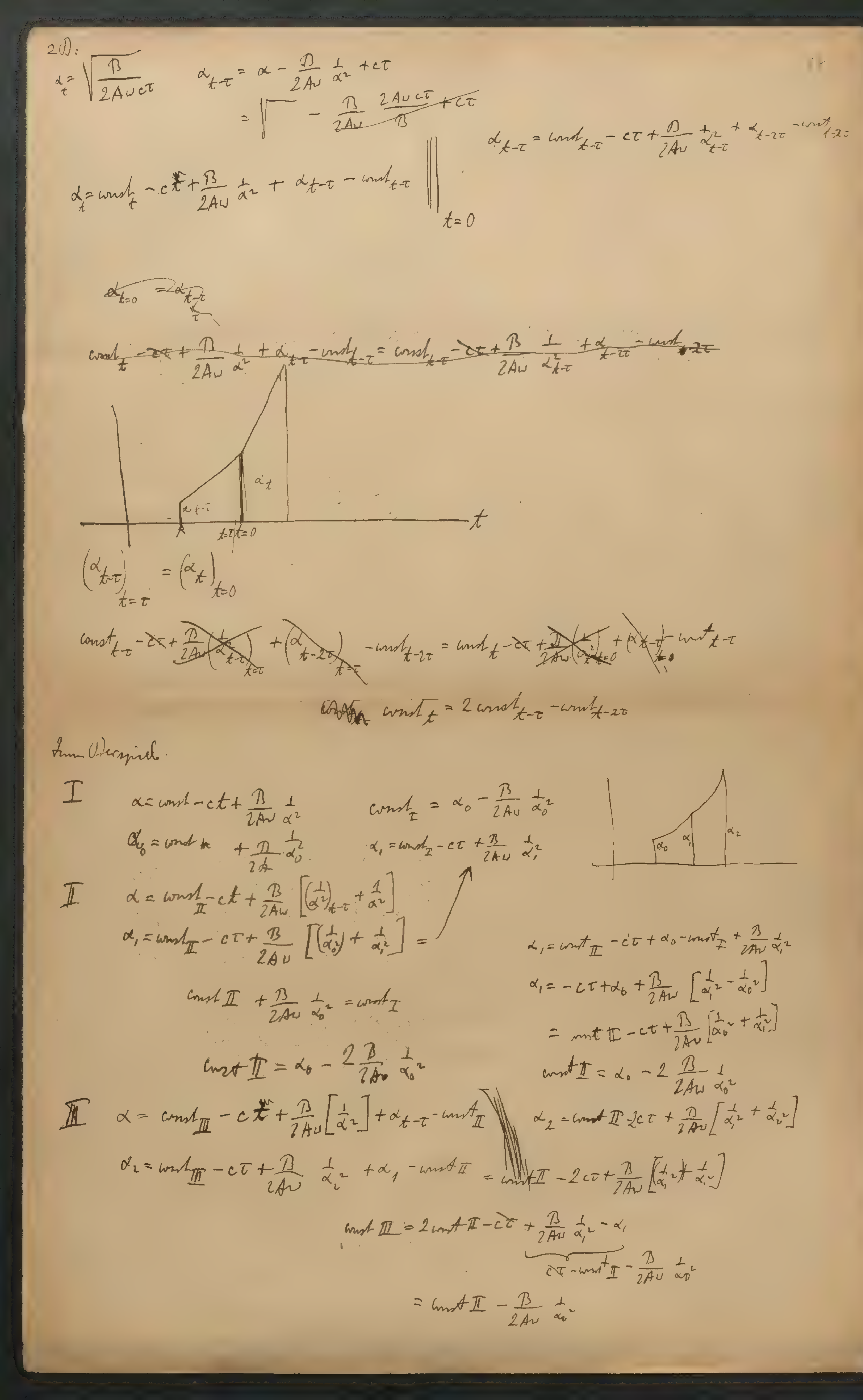
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{B_1}{2A_1}}\frac{\varphi(t)}{\left[\int\varphi(t)\,dt\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\varphi(t)}{\int\varphi(t)\,dt}$$

$$\alpha + u_1 + u_2 = -\frac{B}{2}\frac{m_2+m_1}{m_1 m_2}\int\frac{dt}{\alpha^2} + (c_2 - c_1)\,t + \text{const}$$

$$\sqrt{\frac{-B_1}{2A_1\int\varphi(t)\,dt}} + u_1 + u_2 = +\frac{B}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}\int +\frac{2A_1}{B}\int\varphi(t)\,dt\,dt + (c_2-c_1)\,t + \text{const}$$

$$\alpha + u_1 + u_2 = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} A_1 \int dt \int \varphi(t)\,dt + (c_2 - c_1)\,t + \text{const}$$

$$= \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} A_1 \int dt \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=l_1} dt + \cdots$$



2D:

$\alpha_t = \sqrt{\dfrac{B}{2Awc\tau}}$ $\qquad \alpha_{t-\tau} = \alpha - \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha^2} + c\tau$

$\alpha_{t-\tau} = \text{const}_{t-\tau} - c\tau + \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha^2_{t-\tau}} + \alpha_{t-2\tau} - \text{const}_{t-2\tau}$

$\alpha_t = \text{const}_t - ct + \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha^2} + \alpha_{t-\tau} - \text{const}_{t-\tau} \Big\|_{t=0}$



$(\alpha_{t-\tau})_{t=\tau} = (\alpha_t)_{t=0}$

$\text{const}_{t-\tau} - c\tau + \ldots - \text{const}_{t-2\tau} = \text{const}_t - c\tau + \ldots - \text{const}_{t-\tau}$

$\text{const}_t = 2\,\text{const}_{t-\tau} - \text{const}_{t-2\tau}$

Zum Beispiel.

I $\qquad \alpha = \text{const} - ct + \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha^2}$ $\qquad \text{const}_I = \alpha_0 - \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_0^2}$

$\alpha_0 = \text{const} + \dfrac{B}{2A}\dfrac{1}{\alpha_0^2}$ $\qquad \alpha_1 = \text{const}_I - c\tau + \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_1^2}$



II $\qquad \alpha = \text{const}_{II} - ct + \dfrac{B}{2Aw}\left[\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \dfrac{1}{\alpha^2}\right]$

$\alpha_1 = \text{const}_{II} - c\tau + \dfrac{B}{2Aw}\left[\left(\dfrac{1}{\alpha_0^2}\right) + \dfrac{1}{\alpha_1^2}\right] =$

$\text{const}\,II + \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_0^2} = \text{const}_I$

$\text{const}\,II = \alpha_0 - 2\dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_0^2}$

$\alpha_1 = \text{const}_{II} - c\tau + \alpha_0 - \text{const}_I + \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_1^2}$

$\alpha_1 = -c\tau + \alpha_0 + \dfrac{B}{2Aw}\left[\dfrac{1}{\alpha_1^2} - \dfrac{1}{\alpha_0^2}\right]$

$= \text{const}\,II - c\tau + \dfrac{B}{2Aw}\left[\dfrac{1}{\alpha_0^2} + \dfrac{1}{\alpha_1^2}\right]$

$\text{const}\,II = \alpha_0 - 2\dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_0^2}$

III $\qquad \alpha = \text{const}_{III} - ct + \dfrac{B}{2Aw}\left[\dfrac{1}{\alpha^2}\right] + \alpha_{t-\tau} - \text{const}_{II}$

$\alpha_2 = \text{const}\,II - 2c\tau + \dfrac{B}{2Aw}\left[\dfrac{1}{\alpha_1^2} + \dfrac{1}{\alpha_2^2}\right]$

$\alpha_2 = \text{const}_{III} - c\tau + \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_2^2} + \alpha_1 - \text{const}\,II = \text{const}\,II - 2c\tau + \dfrac{B}{2Aw}\left[\dfrac{1}{\alpha_1^2} + \dfrac{1}{\alpha_2^2}\right]$

$\text{const}\,III = 2\,\text{const}\,II - c\tau + \underbrace{\dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_1^2} - \alpha_1}_{c\tau - \text{const}\,II - \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_0^2}}$

$= \text{const}\,II - \dfrac{B}{2Aw}\dfrac{1}{\alpha_0^2}$

Also folgende Bewegung

Schwingungsdauer:

I $\qquad \alpha = \text{const}_I - ct + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} \qquad \text{const}_I = \alpha_0 + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$

II $\qquad \alpha = \text{const}_{II} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} + \alpha_{t-\tau} - \text{const}_I \qquad \text{const}\, II = \text{const}_I - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$

$$\alpha = \alpha_{t-\tau} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$$

III $\qquad \alpha = \text{const}\, III - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} + \alpha_{t-\tau} - \text{const}_{II} \qquad \text{const}\, III = \text{const}\, II - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$

$$\alpha = \alpha_{t-\tau} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$$

Also.

$$\alpha_t - \alpha_{t-\tau} = \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_t^2} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2} - c\tau$$

Solange sich der Stab in der Richtung der Geschwindigkeit c bewegt, wird die linke Seite < 0, also

$$\frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_t^2} < \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2} + c\tau \cdot \frac{2A\omega}{B}$$

$$\text{also } \alpha_t > \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{2A\omega}{B} c\tau}}$$

Wenn ~~[illegible]~~ das $\alpha_t < \sqrt{\phantom{x}}$ wird so kann er sich nicht mehr in dieser Richtung bewegen.

---

Allgemein $\qquad \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t-\tau} - \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^3}\frac{d\alpha}{dt}$

$$v_t = v_{t-\tau} - \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^3} v_t$$

$$v_t = \frac{v_{t-\tau}}{1 + \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^3}}$$

[illegible]

| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
|---|---|---|---|
| 6.2 | 26.1 | 2.0 | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | 101.5 | [illegible] | [illegible] |
| 45.0 | 140.0 | [illegible] | 103.3 |

| [illegible] | | [illegible] | |
|---|---|---|---|
| 6.2 | 25.2 | 1.0 | [illegible] |
| [illegible] | 50.0 | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | 100.7 | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | 160.1 | [illegible] | 110 |

| 6.6 | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
|---|---|---|---|
| 14.1 | 45.3 | 15.2 | [illegible] |
| 31.0 | [illegible] | 31.2 | [illegible] |
| 47.8 | 140.0 | 47.6 | 137.3 |
| matt | | blank | |

[illegible]

$x = 1$

[illegible]

$v_1 = $ [illegible]

$v_2 = $ [illegible]

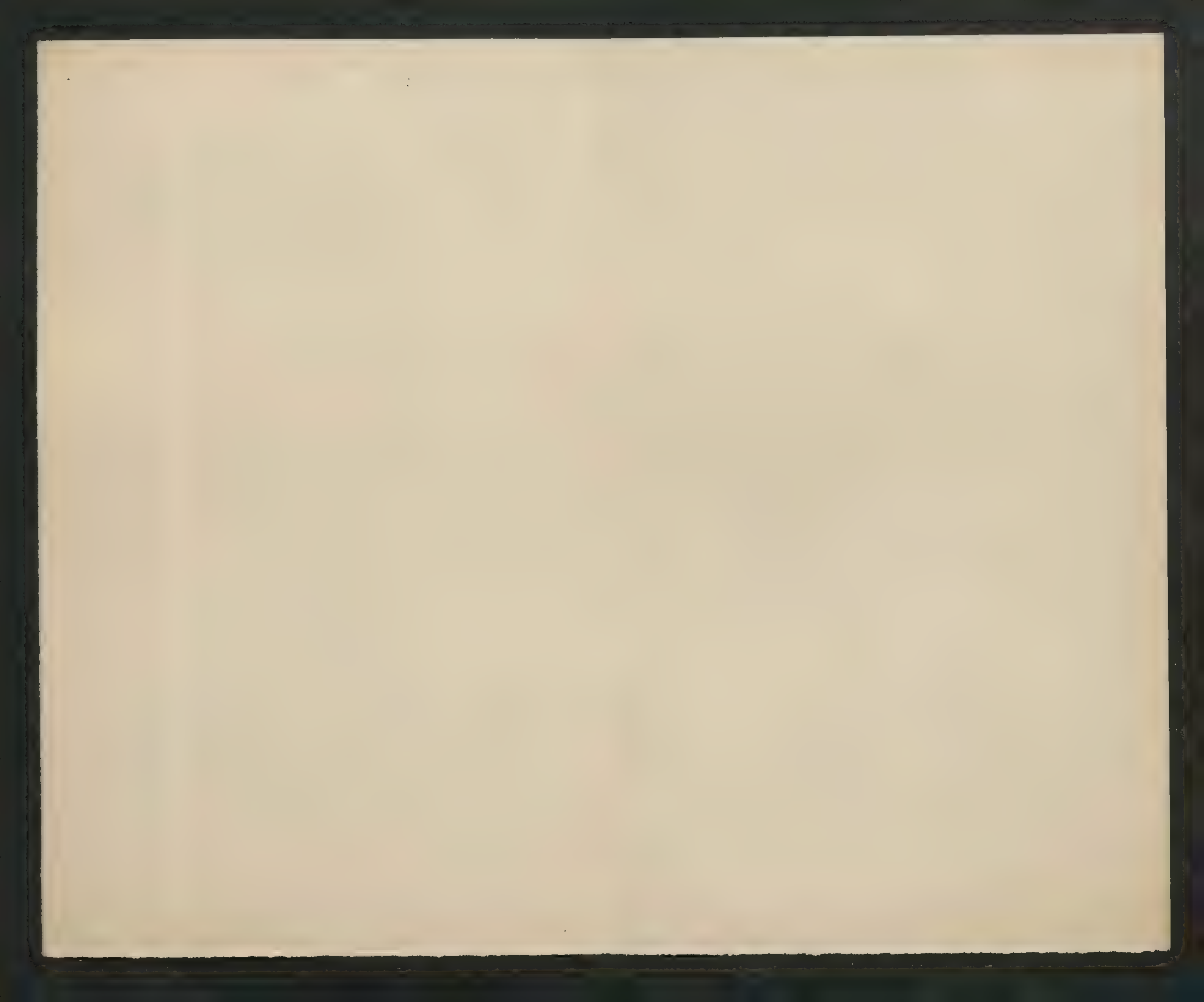
$V_0 = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$

$= -A_0$ [illegible] $t$

[illegible]

I, II :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [illegible] | 1.0 | 2.4 | 2.8 | [illegible] |
| $V_1$ | 1.7 | [illegible] | [illegible] | 117.0 |
| $V_2$ | [illegible] | | | |



[illegible]

[illegible]

[illegible] 75 183

[illegible]

[illegible]

$L_{I} = L_{II} = 3$ [illegible] ; $L_{III} = 2$ [illegible] $L_{IV} =$ [illegible]

| I | I | II | I | I | III |
|---|---|---|---|---|---|
| [illegible] | 0·3 | 15·7 | 20 | 4·2 | 23·2 |
| [illegible] | 0·5 | 37·2 | 40 | 8·4 | 46·2 |
| 8[illegible] | 1·[illegible] | 70·[illegible] | 80 | 15·0 | [illegible] |
| 1[illegible] | 1·6 | 117·[illegible] | 100·[illegible] | 37·6 | 183·[illegible] |
| 1[illegible] | 2·5 | 250·8 | | | |

| III | III | I |
|---|---|---|
| 20 | −3·2 | 15·0 |
| 40 | −6·8 | 31·2 |
| 80 | −12·0 | 61·7 |
| 160·? | −22·0 | 122·0 |

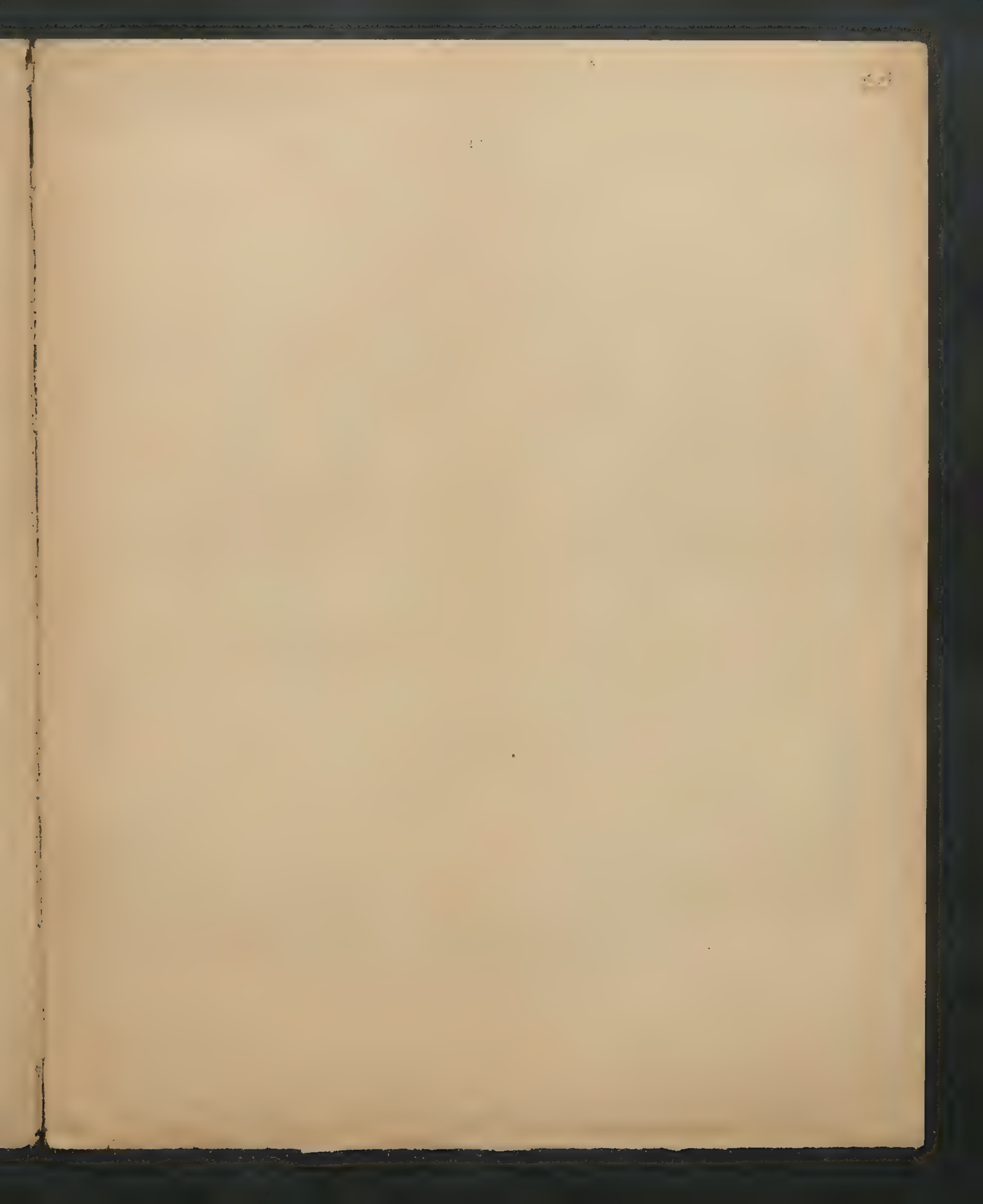
$m_{I} = 226·0$ ?

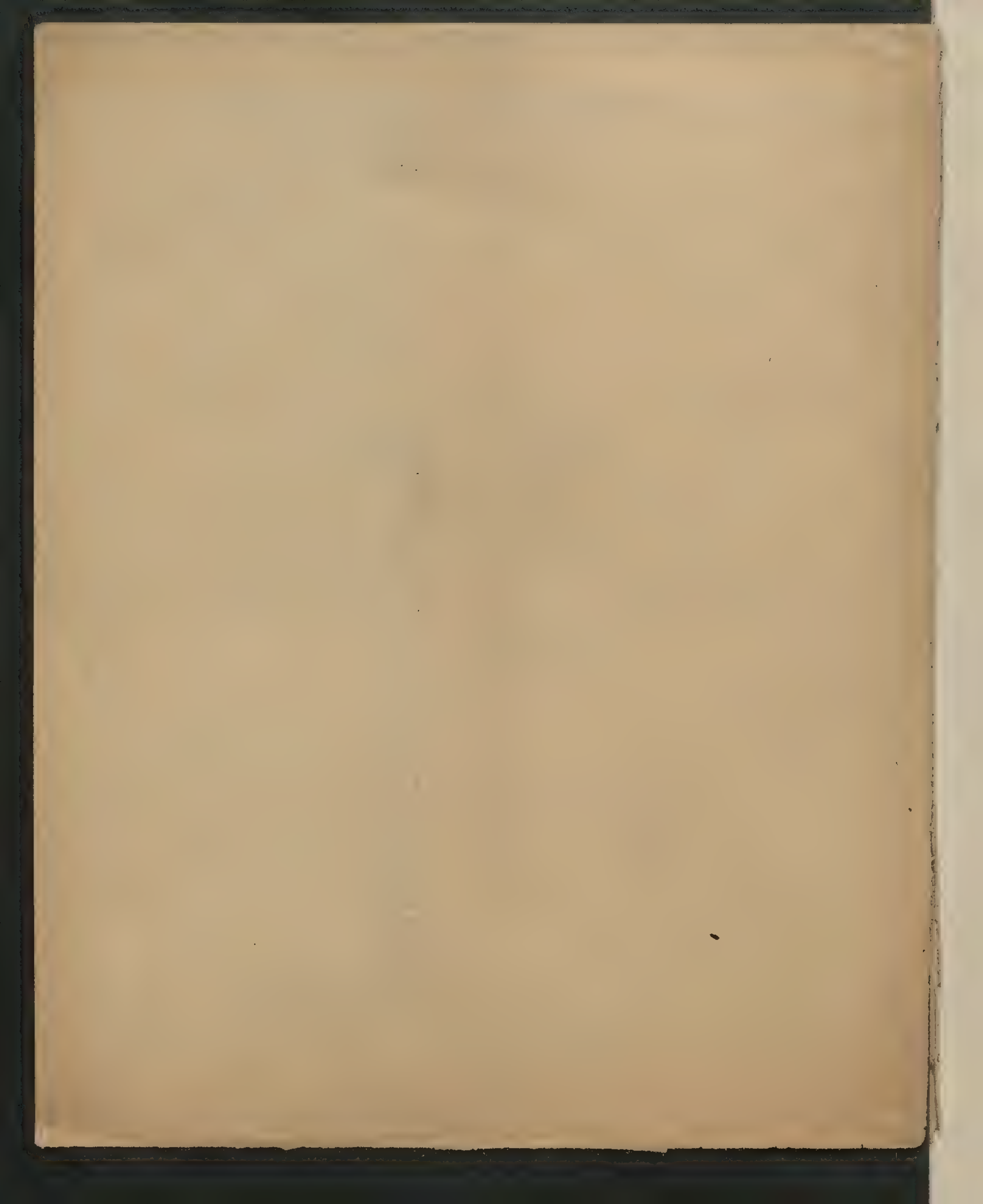
$m_{II} = 151·4$ ?

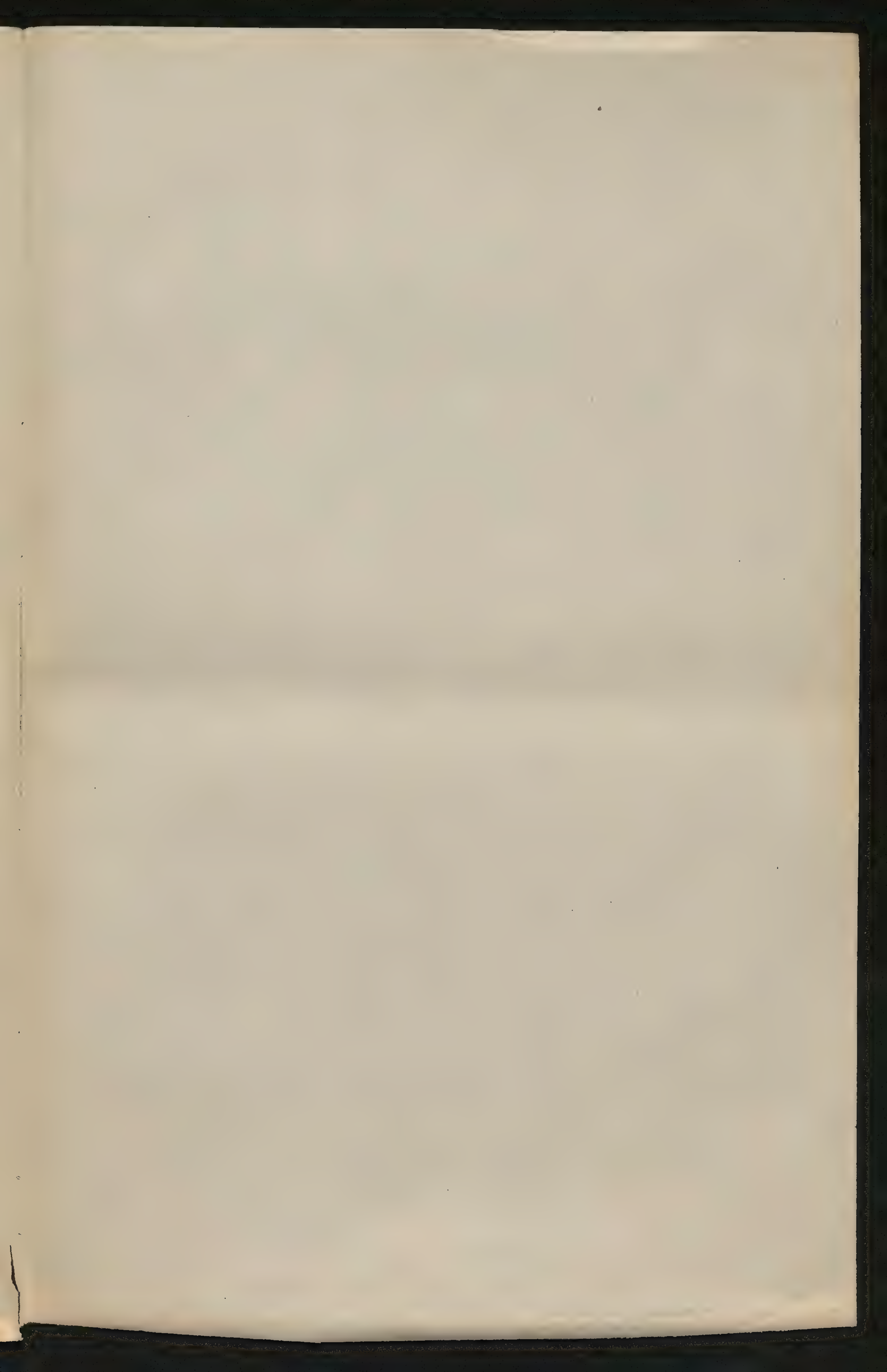
$m_{III} = 225·1$ ?

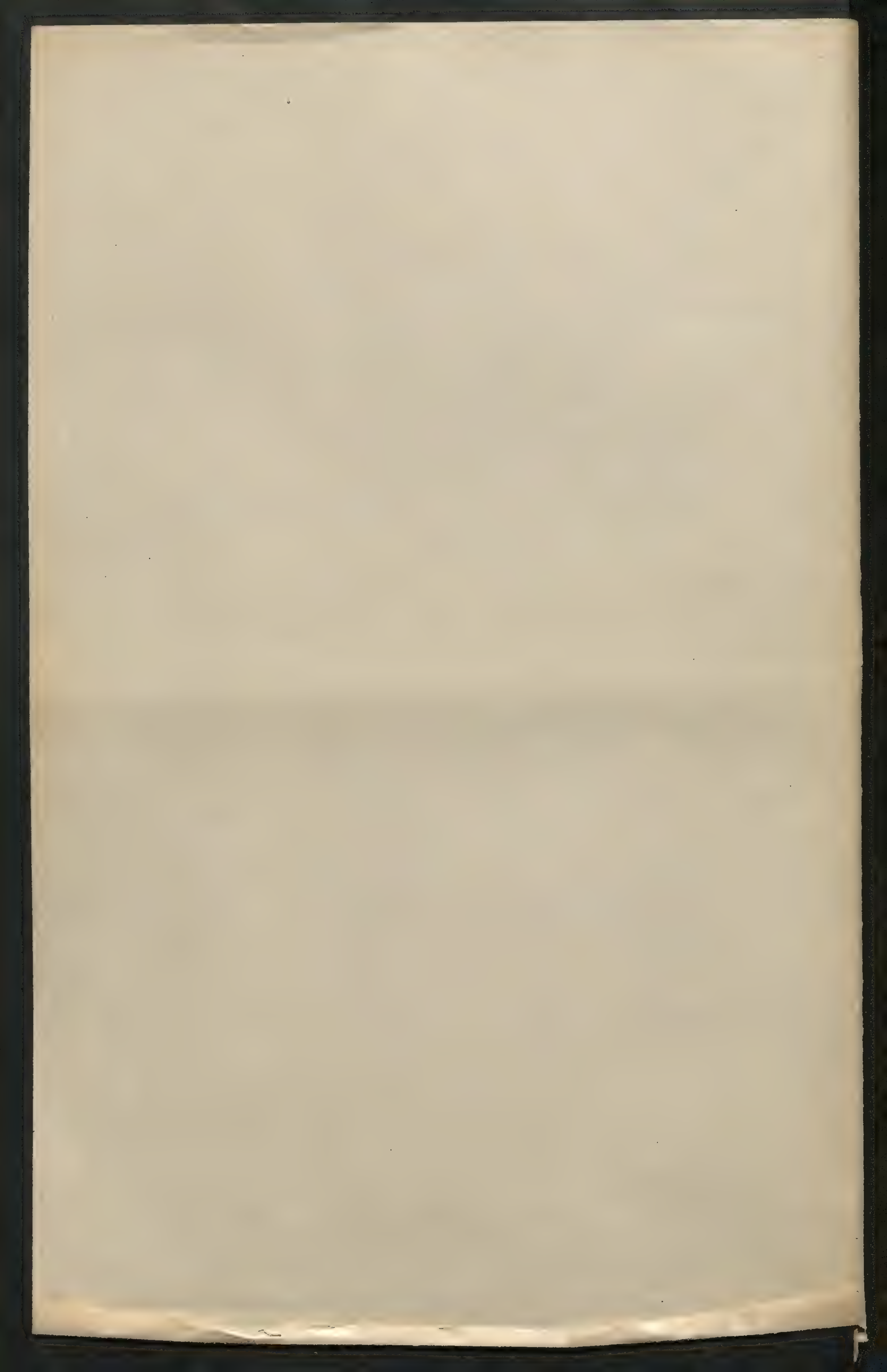
$m_{IV} = 302·5$ ?

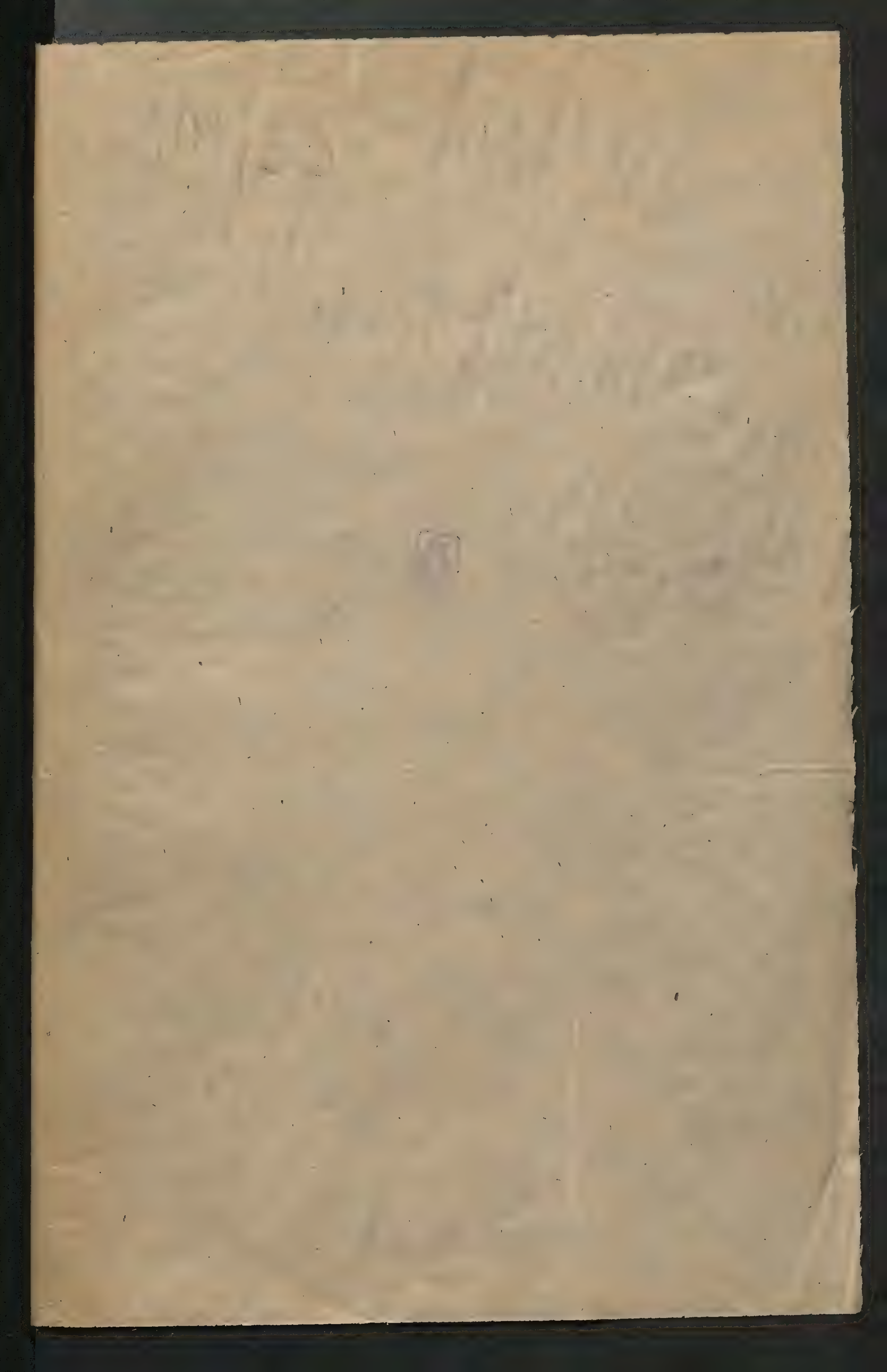
| II | III | IV |
|---|---|---|
| 20 | -6.0 | 13.0 |
| 40 | -11.4 | 25.8 |
| 80.4 | -20.8 | 50.4 |
| 160.8 | -35.4 | 88.0 |

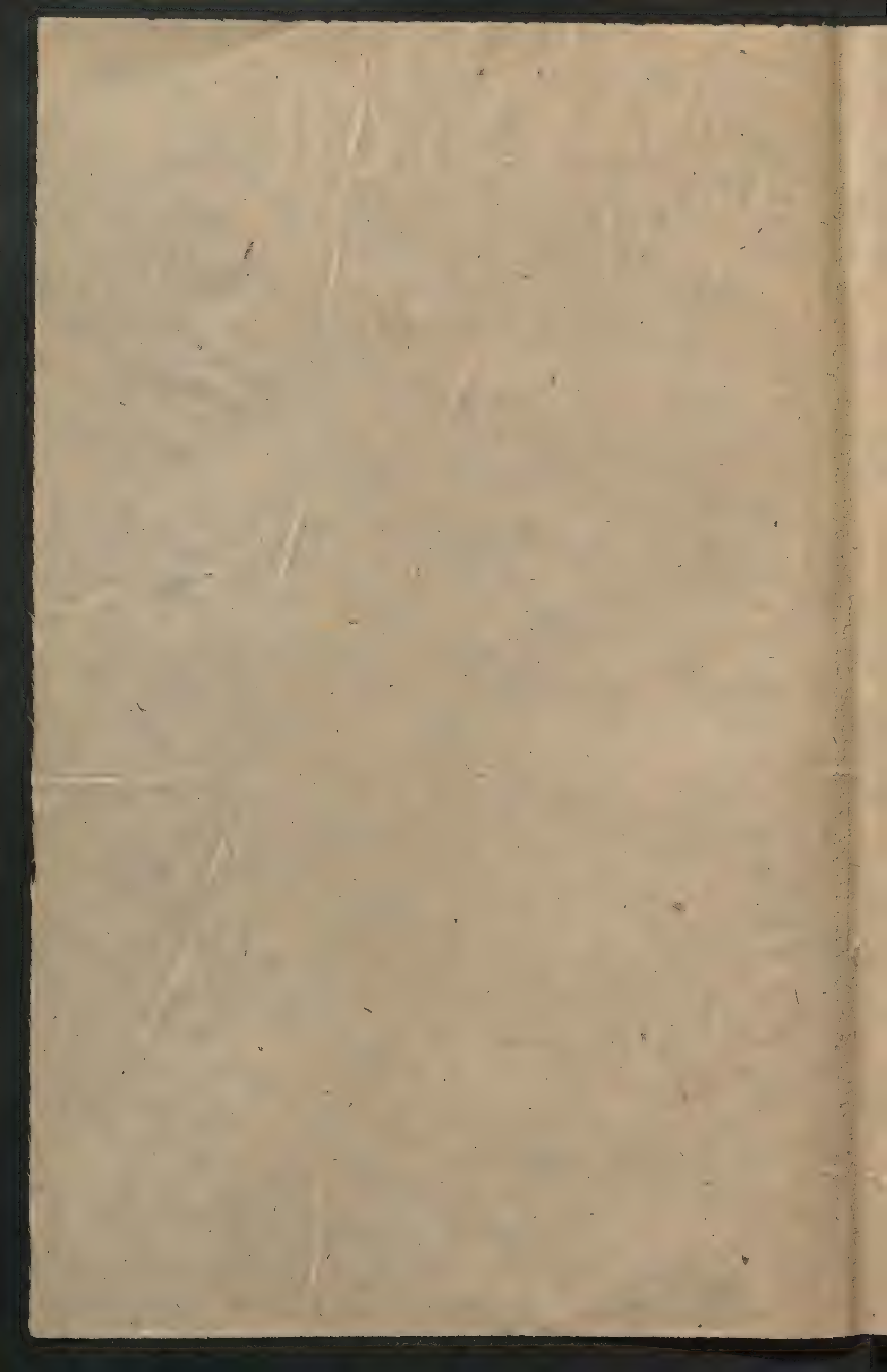




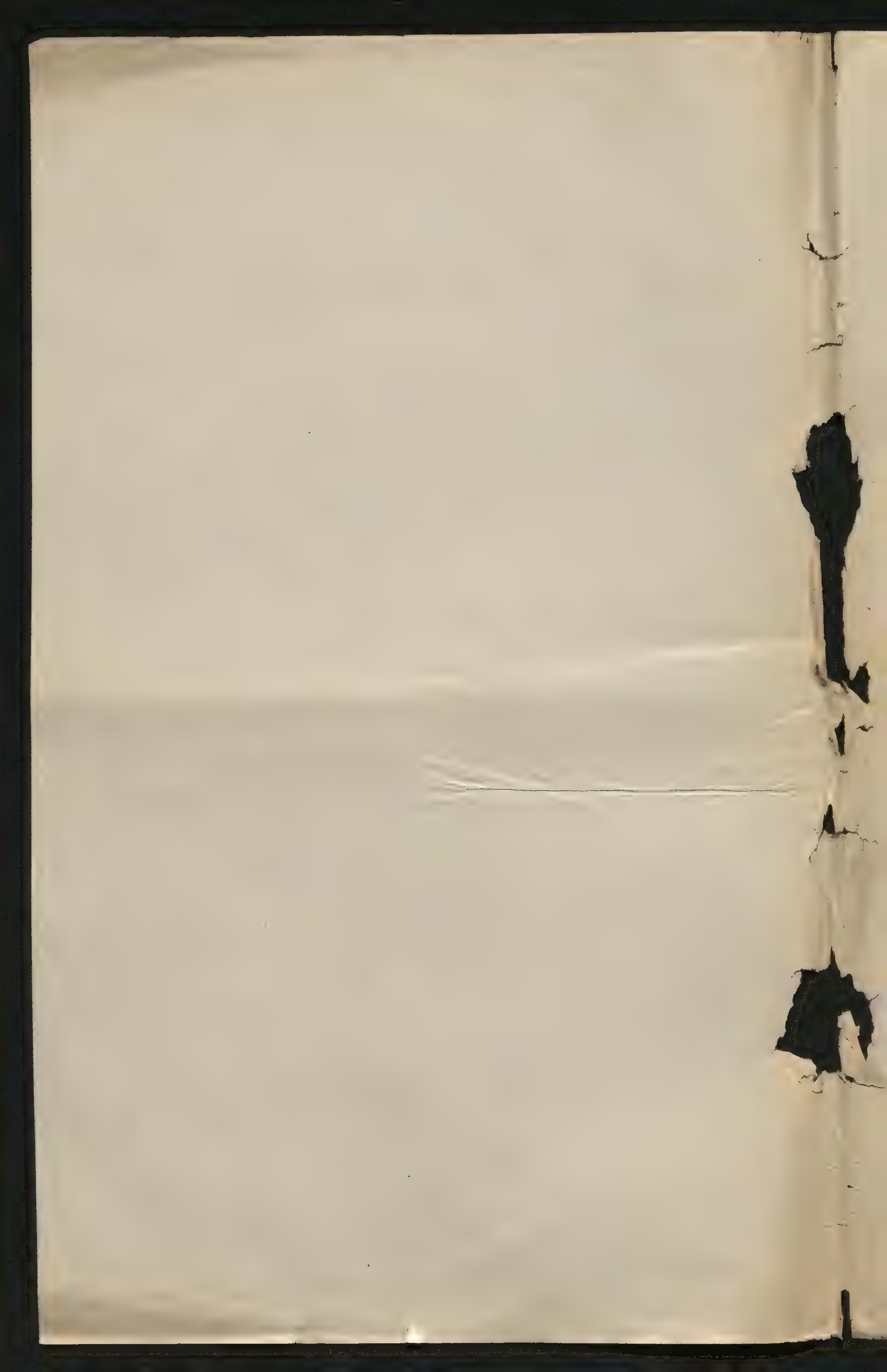












Za czas $t=0$ wszystkie $y_k=0$

$y'_k=0$ tylko $y'_0=1$

$$\dot{y}_k = J_{2k}(2ct)$$

$$\ddot{y}_k = 2c\, J'_{2k}$$

$$y_k = \int_0^t J_{2k}\, dt$$

$$\ddot{y}_k = \frac{c^2}{A}\left(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}\right)$$

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = \int_0^t dt\left(J_{2k+2} - 2J_{2k} + J_{2k-2}\right) = 2\int_0^t dt\left(J'_{2k+1} - J'_{2k-1}\right) = \frac{1}{c}\left(J_{2k+1} - J_{2k-1}\right) = \frac{2}{c} J'_{2k}$$

Np. $k=0$: $= 2\int (J_2 - J_0)\, dt$ $= -2J'_1 = \frac{4}{c} J_1$

$\ddot{y}_0 = 2c\, J'_0 = -2c\, J_1$

$$V = \alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(y_{k+1} - y_k\right)^2$$

$$T = \frac{m}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}_k^2$$

$$m\ddot{y}_k = -2\alpha\left[(-y_k + y_{k+1}) + y_k - y_{k-1}\right]$$

$$= 2\alpha\left[y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}\right]$$

$$\ddot{y}_k = \frac{2\alpha}{m}\left[y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}\right] \qquad \left[\left[c^2 = \frac{2\alpha}{m}\right]\right]$$

$$V = \alpha \sum \left[\int_0^t \underbrace{\left(J_{2k+2} - J_{2k}\right)}_{=2J'_{2k+1}} dt\right]^2 = \frac{\alpha}{c^2} \sum \left(J_{2k+1}\right)^2 = \frac{\alpha}{c^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{2k}^2 = \frac{m}{2} \sum \dot{y}^2 = T$$

---

Energja potenc. mięszy od $-k$ do $+k$

$$V_{-k}^{k} = \alpha \sum\left[(y_{-k-1} - y_k)^2 + (y_{-k} - y_{k+1})^2 + \dots (y_k - y_{k+1})^2\right]$$

$$= \frac{\alpha}{c^2} \sum\left[J_{-2k-1}^2 + J_{-2k+1}^2 + \dots J_{-1}^2 + J_{+1}^2 + \dots J_{2k-1}^2 + J_{2k+1}^2\right]$$

Energja kinet. mięszy od $-k$ do $+k$

$$T_{-k}^{k} = \frac{m}{2}\left[J_{-2k}^2 + \dots\dots + J_{2k}^2\right]$$

$$\left[J_\nu(z)\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_{2\nu}(2z \sin\vartheta)\, d\vartheta$$

zatem całkowita energja mięszy od $-k$ do $+k$

$$E_{-k}^{k} = \frac{m}{2} \sum_{\nu=-2k-1}^{2k+1} J_\nu^2 = \frac{m}{2\pi} \int_0^\pi \sum J_{2\nu}(2z \sin\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{m}{2\pi} \int_0^\pi \left[J_{4k+2} + J_{4k} + \dots J_{-4k-2}\right] d\vartheta$$

Maksymalne zmiany w $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -2mc \, J_{2k+2} \, J_{2k+1}(2ct)$

Dla małych (2ct): $z =$ $J_{2k+2} \, J_{2k+1} \neq z^{4k+3}$

Dla bardzo dużych $z$

$$\neq \frac{2}{\pi z} \sin\left(z - \frac{4k+3}{4}\pi\right) \cos\left(z - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{\pi z} \sin\left(2z - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi z} \cos 2z$$

więc muszą być maksym. wahania pośrodku

przeciętna wartość podczas jednego wahania:

$$\frac{1}{\pi} \int_{z = k\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{\pi z} \cos 2z \, dz = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{k\pi + \varphi} - \frac{1}{k\pi + \pi - \varphi}\right] \cos\varphi \, d\varphi$$

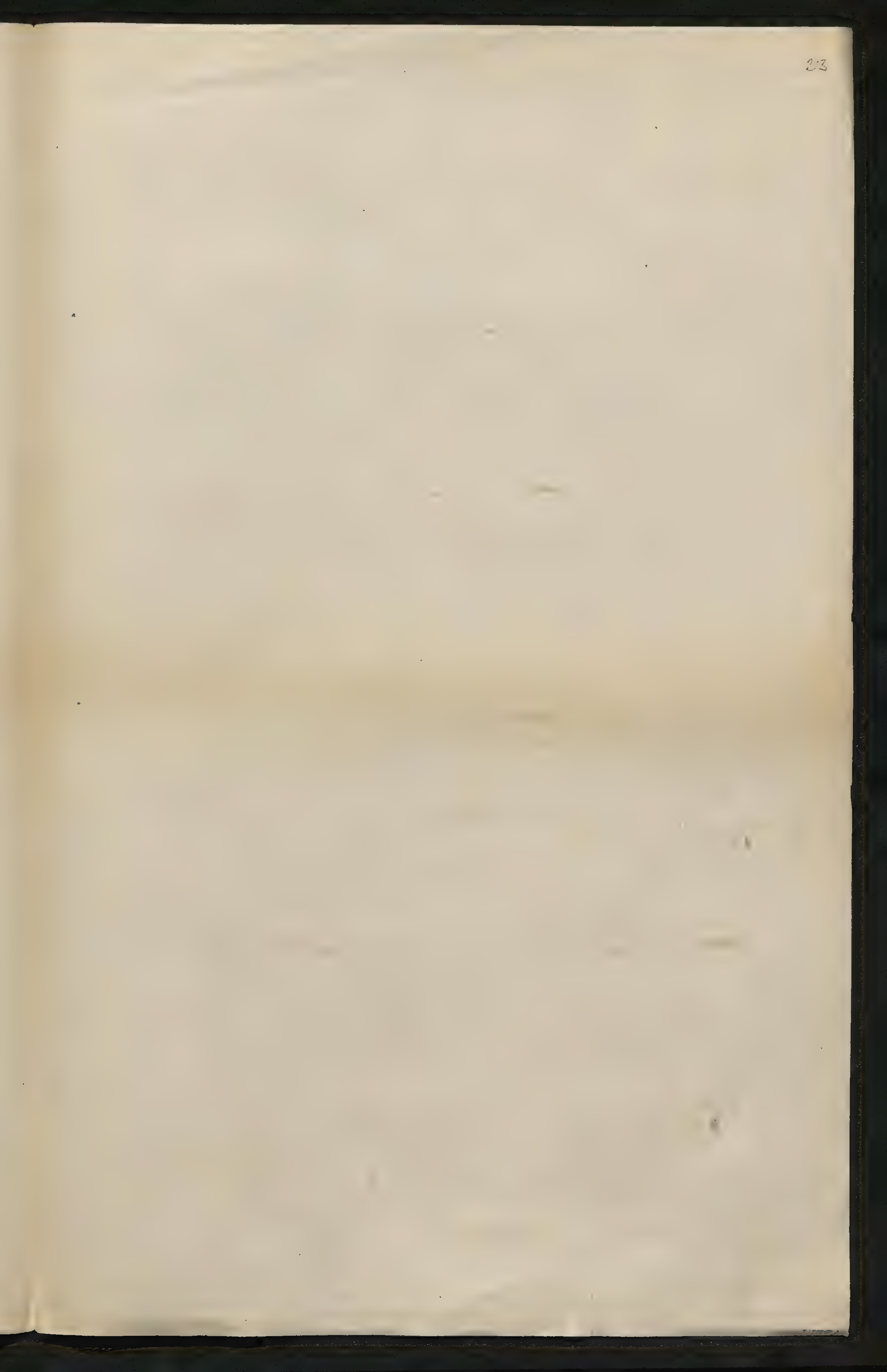
$$\frac{k\pi + \pi - \varphi - k\pi - \varphi}{(k\pi)^2}$$

$$= \frac{1}{k^2 \pi^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{k^2\pi^4}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + 1\right) = \frac{\frac{\pi}{2} + 1}{k^2 \pi^4}$$

$$\int \varphi \cos\varphi \, d\varphi = \sin\varphi \cdot \varphi - \int \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \cos\varphi + \varphi \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\frac{2mc}{(ct)^2} \sim \frac{1}{t^2}!$$



$$E_{-k}^{+k} = \frac{m}{2\pi^2}\int_0^\pi d\theta \sum_{-(2k+1)}^{2k+1} \int_0^\pi \cos(x \sin\omega - 2\nu\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{m}{2\pi^2}\int d\theta \int \cos(x\sin\omega)\, d\omega \sum_{-(2k+1)}^{2k+1} \cos 2\nu\omega + \sin(x\sin\omega) \sum \sin 2\nu\omega$$

$$e^{-(4k+2)i\omega} + e^{-4ki\omega} + \dots + 1 + \dots e^{4ki\omega} + e^{(4k+2)i\omega} = \quad = \sum \cos(2\nu\omega) + i \sum \sin(2\nu\omega)$$

$$= e^{-(4k+2)i\omega}\left[1 + e^{2i\omega} + \dots \; e^{(8k+4)i\omega}\right] \quad - " (e^{2i\omega})^{4k+2}$$

$$\frac{1-(e^{2i\omega})^{4k+3}}{1-e^{2i\omega}}$$

$$= \frac{e^{-(4k+2)i\omega} - e^{(4k+4)i\omega}}{1-e^{2i\omega}} = \frac{e^{-(4k+3)i\omega} - e^{(4k+3)i\omega}}{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}$$

$$= \frac{\sin(4k+3)\omega}{\sin\omega}$$

$$E = \frac{m}{2\pi^2}\int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\omega \frac{\cos(x\sin\omega)\sin(4k+3)\omega}{\sin\omega} \qquad x = 2z\sin\theta = 4ct\sin\theta$$

$$\frac{\partial E|_k^k}{\partial t} = -\frac{2mc}{\pi^2}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^\pi d\omega\, \underbrace{\sin(x\sin\omega)\, \sin(\overbrace{4k+3}^{\mu})\omega}$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x\sin\omega - \mu\omega) - \cos(x\sin\omega + \mu\omega)\right]$$

$$= -\frac{mc}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \left[J_\mu - J_{-\mu}\right] = -\frac{2mc}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\; J_{4k+3}(4ct\sin\theta)$$

$$4ct\sin\theta = u$$

$$4ct\cos\theta\, d\theta = du \qquad d\theta = \frac{du}{4ct\sqrt{1-\left(\frac{u}{4ct}\right)^2}} = \frac{du}{\sqrt{(4ct)^2-u^2}}$$

$$= -\frac{m}{\pi t}\int_0^{4ct} \frac{u\, du}{\sqrt{(4ct)^2-u^2}} J_{4k+3}(u) = -\frac{2mc}{\pi}\int_0^1 \frac{u\, du}{\sqrt{1-u^2}} J_{4k+3}(\alpha u) \qquad \alpha = 4ct, \; \sin\theta = u$$

dla bardzo dużych $4ct \gg 4k+3$ (łatwo się?)

$$\int \sin\theta\, d\theta\, J_{..} \neq \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sqrt{\frac{2}{\pi\, 4ct\sin\theta}} \sin\left(4ct\sin\theta - \frac{4k+2}{4}\pi\right)$$

$n = 2k+2 \qquad z = 2ct$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, J_{2n-1}(2z\sin\theta) = J_n J_{n-1}(z)$$

$$\frac{\partial E_k^k}{\partial t} = -2mc\, J_{2k+2} J_{2k+1}(2ct)$$

$$y e^{2ix} = \alpha$$

$$\sum \quad \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 \dots = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{y e^{2ix}}{1 - y^2 e^{4ix}}$$

$$= \frac{y(\cos 2x + i \sin 2x)}{[1 - y^2\cos 4x - i y^2 \sin 4x]} [1 - y^2 \cos 4x + i y^2 \sin 4x]$$

$$= \frac{y \cos 2x (1 - y^2 \cos 4x) - y^3 \sin 2x \sin 4x + i\{y \sin 2x (1 - y^2 \cos 4x) + y^3 \sin 4x \cos 2x\}}{(1 - y^2\cos 4x)^2 + y^4 \sin^2 4x}$$

$$\sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} y^n \sin 2nx = \frac{y \sin 2x + y^3(\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x)}{1 - 2y^2 \cos 4x + y^4}$$

$$= \frac{y(1+y^2)\sin 2x}{1 - 2y^2\cos 4x + y^4} \qquad \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$$

$$= \frac{y(1+y^2)\sin 2x}{(1-y^2)^2 + 4y^2 \sin^2 2x}$$

limes $x \to \frac{\pi}{4}$, $\sin 2nx$: $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$; $y - y^3 + y^5 - y^7 \dots = \frac{y}{1+y^2}$ stimmt; $\frac{y(1+y^2)}{1+2y^2+y^4}$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sum y^n \sin 2nx = \dots + 3y^2$$

$$= \frac{(1+3y^2)\sin 2x}{1 - 2y^2\cos 4x + y^4} + \frac{y(1+y^2)\sin 2x\,[4y\cos 4x - 4y^3]}{[1 - 2y^2\cos 4x + y^4]^2}$$

$$4.2(1 - \cos 4x) + 2.4.(\cos 4x - 1)$$

$$|_{y=1} = \frac{1}{\sin 2x} - 2\sin 2x \cdot \frac{\dots}{4(1-\cos 4x)^2}$$

$$(1 - \cos 4x) = 2\sin^2 2x$$

$$1 + 3y^2 - 3y^4 - 5y^4\cos 4x - y^6$$

$$= 0 \quad \text{dwóch?}$$

$$\sum_{1,3\dots}^{\infty} n \sin 2nx = 0$$

$$1 + 3y^2 - 2y^2\cos 4x - 6y^4\cos 4x + y^4 + 3y^6$$
$$+ 4(y + y^4)\cos 4x - 4y^4 - 4y^6$$
$$(1 - 2y^2\cos 4x + y^4)^2$$

$$y \sin 2x + 3y^3 \sin 6x + 5y^5 \sin 10x + \dots = \sin 2x \left\{ \frac{y + 3y^3}{1 - 2y^2\cos 4x + y^4} + \frac{4(y^3 + y^5)(\cos 4x - y^2)}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^2} \right.$$

$$1 + 3y^2 + 2y^2\cos 4x - 3y^4 - 2y^4\cos 4x - y^6$$

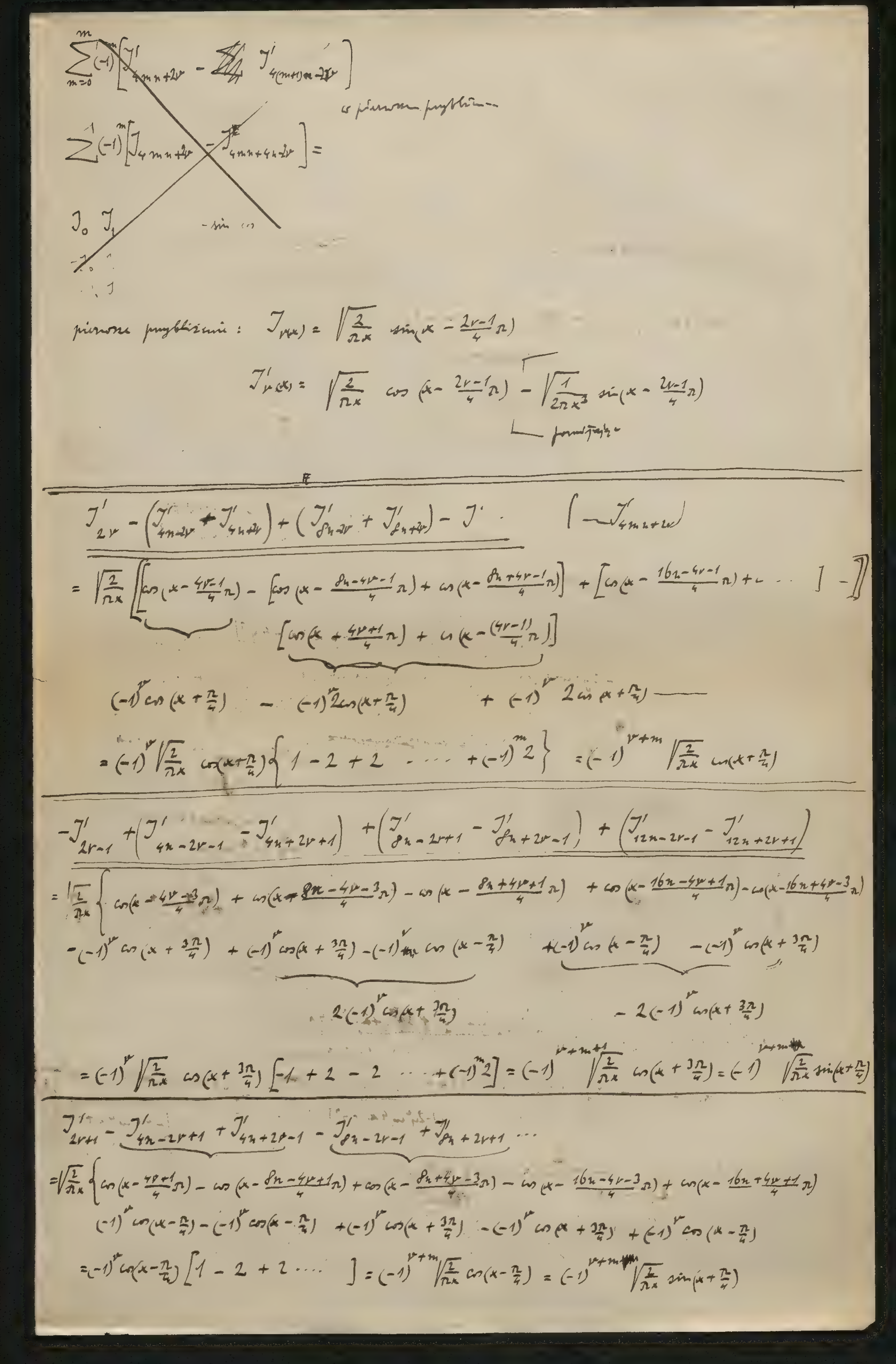
$$= \sin 2x \cdot \frac{y + 3y^3 + 2y^3\cos 4x - 3y^5 - 2y^5\cos 4x - y^7}{(1 - 2y^2\cos 4x + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin 2x \left\{ \frac{1 + 9y^2 + 6y^2\cos 4x - 15y^4 - 10y^4\cos 4x - 7y^6}{(1 - 2y^2\cos 4x + y^4)^2} - 2\frac{[y + 3y^3 + 2y^3\cos 4x - 3y^5 - 2y^5\cos 4x - y^7]\,[-4y\cos 4x + 4y^3]}{[1 \dots\ ]^3} \right.$$

$$y = 1 \quad = \frac{-12 - 4\cos 4x}{4(1-\cos 4x)^2} \sin 2x = \frac{-16 + 8\sin^2 2x}{16 \sin^4 2x} \sin 2x$$

Drugie przybliżenie: $J_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) + \frac{\mu^2}{2x}\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right]$

$J'_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) - \frac{\mu^2}{2x}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right]$



$$\sum_{m=0}^{m}(-1)^m\left[J'_{4mn+2\nu} - J'_{4(m+1)n-2\nu}\right]$$

w pierwszym przybliżeniu

$$\sum^{1}(-1)^m\left[J_{4mn+2\nu} - J_{4mn+4n-2\nu}\right] =$$

$J_0 \quad J_1$    $-\sin \quad \cos$

pierwsze przybliżenie: $J_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$

$$J'_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) - \sqrt{\frac{1}{2\pi x^3}}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$$

pomijające

---

$$J'_{2\nu} - \left(J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu}\right) + \left(J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu}\right) - J' \cdot \qquad \left(- J'_{4mn+2\nu}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[\left[\cos\left(x - \tfrac{4\nu-1}{4}\pi\right) - \left[\cos\left(x - \tfrac{8n-4\nu-1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \tfrac{8n+4\nu-1}{4}\pi\right)\right] + \left[\cos\left(x - \tfrac{16n-4\nu-1}{4}\pi\right) + \dots\right] - \right]\Big]$$

$$\left[\cos\left(x + \tfrac{4\nu+1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \tfrac{(4\nu-1)}{4}\pi\right)\right]$$

$$(-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) \qquad - (-1)^\nu 2\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) \qquad + (-1)^\nu 2\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= (-1)^\nu\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)\left\{1 - 2 + 2 - \dots + (-1)^m 2\right\} = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

---

$$-J'_{2\nu-1} + \left(J'_{4n-2\nu-1} - J'_{4n+2\nu+1}\right) + \left(J'_{8n-2\nu+1} - J'_{8n+2\nu-1}\right) + \left(J'_{12n-2\nu-1} - J'_{12n+2\nu+1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{\cos\left(x - \tfrac{4\nu-3}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \tfrac{8n-4\nu-3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \tfrac{8n+4\nu+1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \tfrac{16n-4\nu+1}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \tfrac{16n+4\nu-3}{4}\pi\right)$$

$$-(-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right) + (-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) \quad + (-1)^\nu\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right)$$

$$2(-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right) \qquad - 2(-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right)$$

$$= (-1)^\nu\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right)\left[-1 + 2 - 2 \dots + (-1)^m 2\right] = (-1)^{\nu+m+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right) = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

---

$$J'_{2\nu+1} - J'_{4n-2\nu+1} + J'_{4n+2\nu-1} - J'_{8n-2\nu-1} + J'_{8n+2\nu+1} \dots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{\cos\left(x - \tfrac{4\nu+1}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \tfrac{8n-4\nu+1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \tfrac{8n+4\nu-3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \tfrac{16n-4\nu-3}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \tfrac{16n+4\nu+1}{4}\pi\right)$$

$$(-1)^\nu\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + (-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x + \tfrac{3\pi}{4}\right) + (-1)^\nu\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= (-1)^\nu\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)\left[1 - 2 + 2 \dots\right] = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$J'_{2\nu} - (J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu}) + (J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu}) \dots$$

$$= (-1)^{\nu+m} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos(x + \tfrac{\pi}{4})\right] - (-1)^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \; \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{2x} \left[\cancel{1} - 32 \frac{n^2 m^2}{2} (-1)^{m+1}\right]$$

$$= (-1)^{\nu+m} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos(x + \tfrac{\pi}{4}) - 8 \frac{n^2 m^2}{x} \sin(x + \tfrac{\pi}{4})\right]$$

$x + (\nu+1)\pi$

$x - \frac{4\nu-4}{4}\pi$

---

$J_{2(\nu+1)} - J.$

$$J_{2\nu-2} - J_{2\nu+2} - J_{4n-2\nu-2} + J_{4n-2\nu+2} + J_{4n+2\nu-2} - J_{4n+2\nu+2} - J_{8n-2\nu} \dots$$

$$(-1)^{\nu+1} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) + \frac{\mu^2}{2x} \cos(x + \tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$+ (-1)^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \; \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{2x} \left[(4\overset{m}{n} - 2\nu - 2)^2 + (4\overset{m}{n} + 2\nu + 2)^2 - (4\overset{m}{n} - 2\nu + 2)^2 - (4\overset{m}{n} + 2\nu - 2)^2\right]$$

$$(4mn - 2\nu)^2 - 4(4mn - 2\nu) + 4 \quad + \quad (4mn + 2\nu)^2 + 4(4mn + 2\nu) + 4$$

$$-\left[(4mn - 2\nu)^2 + 4(4mn - 2\nu) + 4\right] \qquad + 4(4mn + 2\nu)$$

$$= 32\nu$$

$$\Sigma \; J_{2\nu-2} - J_{2\nu+2} \dots \qquad J_{4mn-2\nu} \dots = 32 m\nu \, (-1)^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \; \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{2x}$$

$$(-1)^{\nu+m} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos^2(x + \tfrac{\pi}{4}) \; \overline{y_0^2} \beta \; (-1)^{\nu} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}{2x} \; 32 m \, \Sigma \nu^2 = (-1)^m \frac{32 \, m \, \nu^3}{3 \pi x^2} \; \overline{y_0^2} \beta \cdot 2c\alpha$$

$$x = 2ct \qquad = 32 ct$$

$$2m\nu = 2ct$$

$$J_{2\nu-2} - J_{2\nu+2} = (-1)^{\nu+1} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin(x + \tfrac{\pi}{4})\right] + (-1)^{\nu} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x+\frac{\pi}{4})}{2x} \left[(2\nu - 2)^2 - (2\nu + 2)^2\right]$$

$$16\nu$$

$$\overline{y_0^2} \beta \; 2c\alpha \; \frac{32}{3\pi} (-1)^{\frac{ct}{\nu}} \frac{\nu^3}{c^2 t^2} \qquad \frac{\nu^2}{ct} (-1)^{\frac{ct}{\nu}}$$

---

$$\sin\left[x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{(4n - 2\nu + 2)^2}{2x}\right] - \sin\left[x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{(4n - 2\nu - 2)^2}{2x}\right] + \sin\left[x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{(4n + 2\nu - 2)^2}{2x}\right] - \sin\left[x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{(4n + 2\nu + 2)^2}{2x}\right]$$

$$\cos\left[x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{(4n - 2\nu)^2}{2x}\right] \sin\frac{(4n - 2\nu)4}{x} \qquad - \cos\left[x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{(4n + 2\nu)^2}{2x}\right] \sin\left(\frac{4n + 2\nu}{x}\right)$$

$$\frac{4n}{x} \left\{\cos\left[x + \tfrac{\pi}{4} + 8\frac{n^2}{x} - 8\frac{n\nu}{x}\right] - \cos\left[x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{8n^2}{x} + \frac{8n\nu}{x}\right]\right\} = \frac{4n^2\nu}{x^2} \sin\left(x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{8n^2}{x}\right)$$

$$\frac{n^2}{x} \frac{\nu^2}{x} m^2$$

$$\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4} + \frac{8n^2}{x}\right) \left[\; \cdot \frac{4n}{x} \right.$$

$$= \frac{4n}{x}\left[\cos(x + \tfrac{\pi}{4}) - \frac{8n^2}{x} \sin(x + \tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$J'_{4mn-\nu+1} + J'_{4mn-\nu-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2(4mn-\nu)}{x} J_{4mn-\nu}\right]$$

$$J'_{\dots} + \dots = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2(4mn+\nu)}{x} J_{4mn+\nu}\right]$$

$$= \frac{2}{\partial x}\left[\frac{8mn}{x}\left(J_{4mn-\nu} - J_{4mn+\nu}\right) \frac{2\nu}{x}\left(J_{4mn-\nu} + J_{4mn+\nu}\right)\right]$$

---

$$J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_{\nu}$$

$$J_{\nu-3} - J_{\nu-1} = 2J'_{\nu-2}$$

$$y_0 = y_0 J_0 + (y_1 + y_{-1}) J_1 + (y_2 + y_{-2}) J_2 + (y_3 + y_{-3}) J_3 + \dots \quad (y_{n-2} + y_{-n+2}) J_{n-2} + (y_{n-1} + y_{-n+1}) J_{n-1}$$

$$-(y_1 + y_{-1}) J_{2n-1} - (y_2 + y_{-2}) J_{2n-2} - (y_3 + y_{-3}) J_{2n-3} \quad - (y_{n-2} + y_{n+2}) J_{n+2} - (y_{n-1} + y_{-n+1}) J_{n+1}$$

$$-2y_0 J_{2n}$$

$$-(y_1 + y_{-1}) J_{2n+1} - (\ " \ ) J_{2n+2} - (\ " \ ) J_{2n+3} \dots - (\ " \ ) J_{3n-2} - (y \ \dots \ ) J_{3n-1}$$

$$+ (\quad) J_{4n-1} + (\quad) J_{4n-2} + (\quad) J_{4n-3} \quad + (\quad) J_{3n+2} + (\quad) J_{3n+1}$$

$$+ 2y_0 J_{4n}$$

$$+ (\quad) J_{4n+1} \dots$$

---

$$y_1 = y_1 J_0 + (y_2 + y_0) J_1 + (y_3 + y_{-1}) J_2 + (y_4 + y_{-2}) J_3 + \dots \quad + (y_{n-2} + y_{-n+4}) J_{n-3} + (y_{n-1} + y_{-n+3}) J_{n-2} + (y_n + y_{n+2}) J_{n-1}$$

$$+ (-y_{n-1} + y_{-n+1}) J_n$$

$$-(y_0 + y_{-2}) J_{2n-1} - (y_1 + y_{-3}) J_{2n-2} - (y_2 + y_{-4}) J_{2n-3} \quad - (y_{n-4} + y_{-n+2}) J_{n+3} - (y_{n-3} + y_{-n+1}) J_{n+2} - (y_{n-2} + y_n) J_{n+1}$$

$$-2 y_{-1} J_{2n}$$

$$-(y_0 + y_{-2}) J_{2n+1} - (\ " \ ) J_{2n+2} - (\ " \ ) J_{2n+3} \ \dots - (\quad) J_{3n-3} - (\quad) J_{3n-2} - (\quad) J_{3n-1}$$

$$-(y_{n-1} - y_{-n+1}) J_{3n}$$

$$(y_2 + y_0) J_{4n-1} + (y_3 + y_{-1}) J_{4n-2} + (y_4 + y_{-2}) J_{4n-3} \quad + (y_{n-2} + y_{-n+4}) J_{3n+3} + (y_{n-1} + y_{-n+3}) J_{3n+2} + (y_n + y_{-n+2}) J_{3n+1}$$

$$+ 2y_1 J_{4n}$$

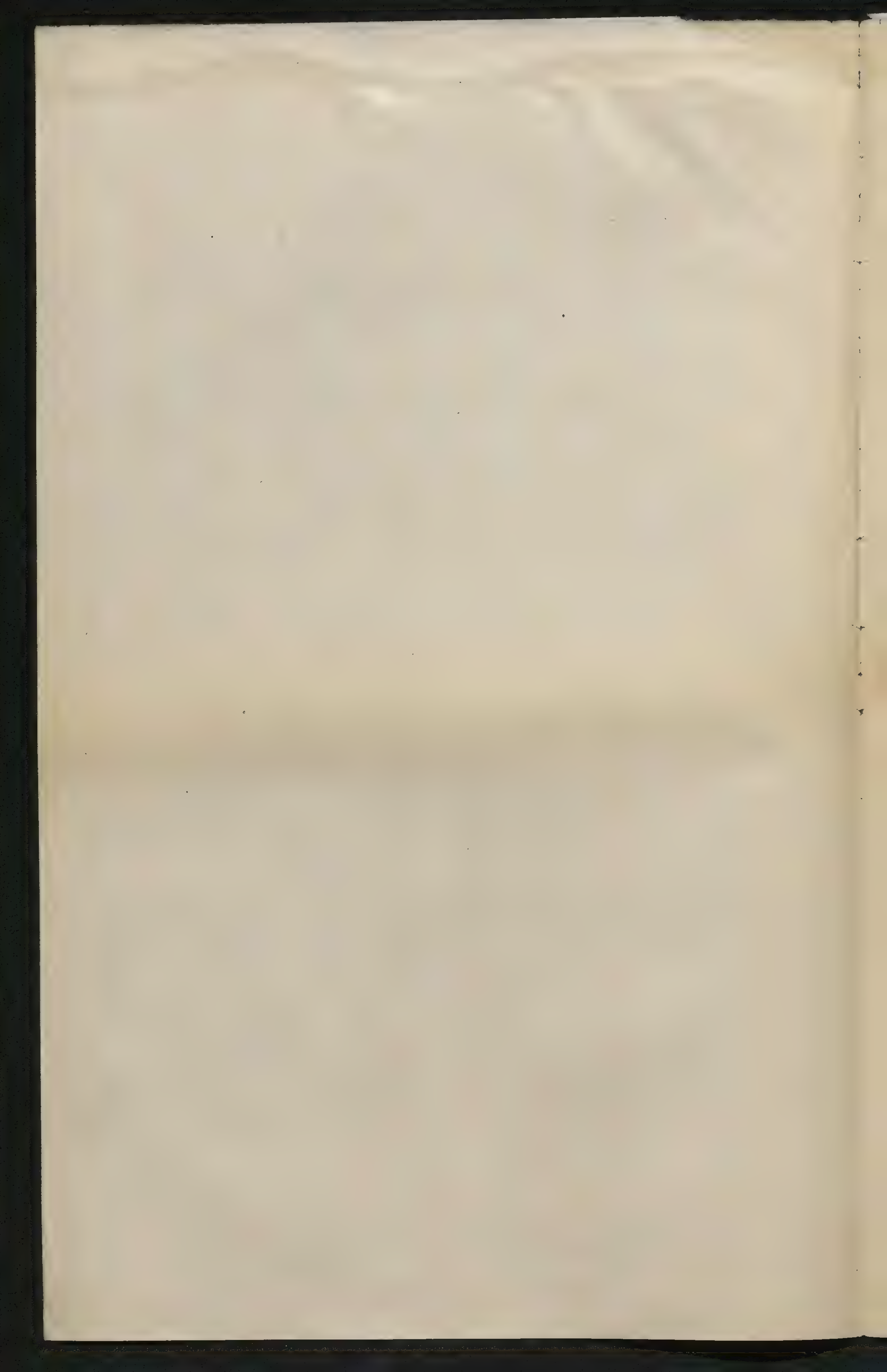
$$+ (\ " \ ) J_{4n+1} + (\quad) J_{4n+2} + \dots$$

---

$$y_1 - y_0 = y_0 \left[ -J_0 + J_1 \middle| - J_{2n-1} + 2J_{2n} - J_{2n+1} \middle| + J_{4n-1} - 2J_{4n} + J_{4n+1} \middle| - J_{6n-1} + 2J_{6n} - J_{6n+1} \dots \right]$$

$$+ y_1 \left[ J_0 - J_1 \middle| - J_{2n-2} + J_{2n-1} + J_{2n+1} - J_{2n+2} \middle| - J_{4n-1} + 2J_{4n} - J_{4n+1} \middle| - J_{6n-2} + J_{6n-1} + J_{6n+1} - J_{6n+2} \middle| - J_{8n-1} + 2J_{8n} - J_{8n+1} - \right]$$

$$+ y_{-1} \left[ -J_1 + J_2 \middle| + J_{2n-1} - 2J_{2n} + J_{2n+1} \middle| + J_{4n-2} - J_{4n-1} - J_{4n+1} + J_{4n+2} \middle| + J_{6n-1} - 2J_{6n} + J_{6n+1} \middle| + J_{8n-2} \dots \right.$$



$$+y_2\left[J_1 - J_2 \;\middle|\; - J_{2n-3} + J_{2n-2} + J_{2n+2} - J_{2n+3} \;\middle|\; + J_{4n-2} + J_{4n-1} + J_{4n+1} - J_{4n+2} \;\middle|\; - J_{6n-3} + J_{6n-2} \cdots\right.$$

$$+y_{-2}\left[-J_2 + J_3 + J_{2n-2} + J_{2n-1} - J_{2n+1} + J_{2n+2} \;\middle|\; + J_{4n-3} - J_{4n-2} - J_{4n+2} + J_{4n+3} \;\middle|\; + J_{6n-2} - J_{6n-1} -\right.$$

$$+y_3\left[J_2 - J_3 - J_{2n-4} + J_{2n-3} + J_{2n+3} - J_{2n+4} \;\middle|\; + J_{4n-3} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+3} \;\middle|\; - J_{6n-4} + J_{6n-3}\right.$$

$$+y_{-3}\left[-J_3 + J_4 + J_{2n-3} - J_{2n-2} - J_{2n+2} + J_{2n+3} + J_{4n-4} - J_{4n-3} - J_{4n+3} + J_{4n+4} \;\middle|\; -\right.$$

wszędzie indeksy podwójne i użyć wzoru $J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu$

$$\frac{y_1 - y_0}{2} = y_0\left[J'_1 + J'_{4n-1} - J'_{4n+1} - J'_{8n-1} + J'_{8n+1} + J'_{12n-1} - J'_{12n+1} \cdots\right]$$

$$+y_1\left[-J'_1 + J'_{4n-3} - J'_{4n+3} + J'_{8n-1} - J'_{8n+1} + J'_{12n-3} - J'_{12n+3} \cdots\right]$$

$$+y_{-1}\left[J'_3 - J'_{4n-1} + J'_{4n+1} - J'_{8n-3} + J'_{8n+3} - J'_{12n-1} + J'_{12n+1}\right]$$

$$+y_2\left[-J'_3 + J'_{4n-5} - J'_{4n+5} + J'_{8n-3} - J'_{8n+3} + \quad -\right]$$

$$+y_{-2}\left[J'_5 - J'_{4n-3} + J'_{4n+3} - J'_{8n-5} + J'_{8n+5} -\right]$$

$$+y_3\left[-J'_5 + J'_{4n-7} - J'_{4n+7} + J'_{8n-5} - J'_{8n+5} + \quad -\right]$$

$$J'_0 - 2J'_{4n} + 2J'_{8n} - 2J'_{12n}$$

$$J'_2 - J'_{4n-2} - J'_{4n+2} + J'_{8n-2} + J'_{8n+2}$$

$$J'_4 - J'_{4n-4} - J'_{4n+4} + J'_{8n-4} + J'_{8n+4}$$

$$J'_6 - J'_{4n-6} - J'_{4n+6} + J'_{8n-6} + J'_{8n+6} \cdots$$

$$\dot{y}_0\frac{(y_1 - y_0)}{2} = \overline{y_0^2}\left[J'_0 - 2J'_{4n} + 2J'_{8n} - 2J'_{12n} \cdots\right]\left[J'_1 + J'_{4n-1} - J'_{4n+1}\right.$$

supozycja od razu: $\overline{y_k^2} = \overline{y_0^2}(1 + \beta k)$

$$= \overline{y_0^2}\left\{\left[J'_1 - 2J''_{4n} + 2J''_{8n} - 2J''_{12n} \cdots\right]\left[J'_0 - 2J'_{4n} + 2J'_{8n} - 2J'_{12n} \cdots\right]\right.$$

$$+2\left[J''_2 - J''_{4n-2} + J''_{4n+2} - J''_{8n-2} + J''_{8n+2} \cdots\right]\left[J'_2 - J'_{4n-2} - J'_{4n+2} + J'_{8n-2} + J'_{8n+2} \cdots\right]$$

o ile punkty stonkowo do n nie/wszystkie ?, a n b. duże, można to wszystko uważać za [illegible]

Drugie przybliżenie: $J'_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) - \frac{\nu^2}{2x}\sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right]$

$$J'_{2\nu} - (J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu}) + (J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu}) - \dots =$$

$$= (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[1 - 2(4n)^2 + 2(8n)^2 - \dots (4mn)^2\right]$$

$$\left\{1 - 32n^2\left[1 - 4 + 9 - 16 \dots - m^2\right]\right\}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \dots \quad m^2$$

$$\int \frac{dx}{x}\int F(x)\,dx = x - x^2 + x^3 \dots = \frac{x - x^{m+1}}{1-x}$$

$$\int F(x)\,dx = x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x}\right] = x\left[\frac{1-(m+1)x^m}{1-x} + \frac{x - x^{m+1}}{(1-x)^2}\right]$$

$$= x\,\frac{1-x^m}{(1-x)^2} - \frac{m x^{m+1}}{1-x}$$

$$F(x) = \frac{1-x^m}{(1-x)^2} - \frac{(m+1)x^m}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x^m)}{(1-x)^3} - m\frac{(m+1)x^m}{1-x} + \frac{m x^{m+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x^m}{(1-x)^2} + 2\frac{x^m - 1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x - x^2 + x^3 \dots + (-1)^{m+1}x^m = S_m$$

$$x + (-1)^{m+1}x^{m+1} = (1+x)S_m$$

$$= \frac{x + (-1)^{m+1}x^{m+1}}{1+x}$$

$$x - 2x^2 + 3x^3 \dots + (-1)^{m+1}m x^m = x\frac{\partial}{\partial x}(S_m)$$

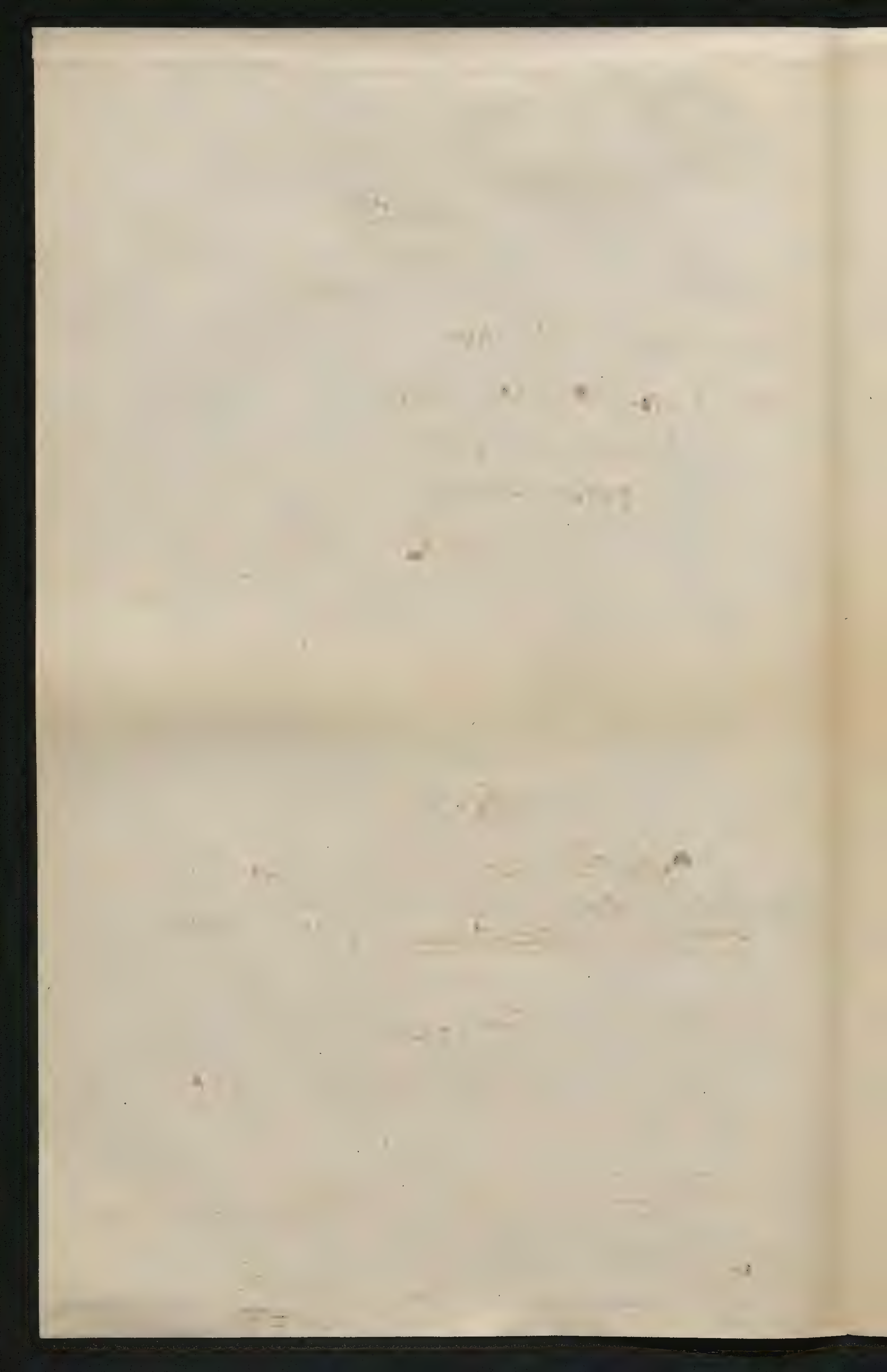
$$1 - 2^2 + 3^3 \dots \quad (-1)^{m+1}m^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial}{\partial x}(S_m)\right]\Bigg|^{x=1} = \frac{\partial}{\partial x}S_m\Big|_{x=1} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\Big|_{x=1}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1 + (-1)^{m+1}(m+1)x^m}{1+x} - \frac{x + (-1)^{m+1}x^{m+1}}{(1+x)^2} \quad \Big|^{x=1} = \frac{1}{4} + (-1)^{m+1}\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{(-1)^{m+1}m(m+1)x^{m-1}}{1+x} - 2\frac{1+(-1)^{m+1}(m+1)x^m}{(1+x)^2} + 2\frac{x + (-1)^{m+1}x^{m+1}}{(1+x)^3} = -\frac{1}{4} + (-1)^{m+1}\left[\frac{m^2}{2} - \frac{1}{4}\right]$$

$$\frac{m^2+m}{2} - \frac{(m+1)}{2} + \frac{1}{4} \qquad -\frac{2}{4} + \frac{2}{8}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 \dots (-1)^{m+1}m^2 = (-1)^{m+1}\left[\frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}\right]$$



(15, 8) $x=2$

$$1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\nu!}{\lambda!} J_{\nu+\lambda} = \nu! \left[ J_{\nu(1)} + \frac{J_{\nu+1(1)}}{1!} + \frac{J_{\nu+2(1)}}{2!} + \frac{J_{\nu+3(1)}}{3!} + \dots \right]$$

---

$$y \sin 2x + 3^2 y^3 \sin 6x + 5^2 y^5 \sin 10x + \dots =$$

$$= \sin 2x \left\{ \frac{y + 9y^3 + 6y^3 \cos 4x - 15y^5 - 10y^5 \cos 4x - 7y^7}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^2} + \right.$$

$$\left. + 8 \cdot \frac{\left\{ \cos 4x \cdot [y^3 + 3y^5 + 2y^5 \cos 4x - 3y^7 - 2y^7 \cos 4x - y^9] - [y^5 + 3y^7 + 2y^7 \cos 4x - 3y^9 - 2y^9 \cos 4x - y^{11}] \right\}}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^3} \right\}$$

$$\sin 2x + 3^3 \sin 6x + 5^3 \sin 10x \dots = \sin 2x \left\{ \frac{1 + 27 + 18 \cos 4x - 75 - 50 \cos 4x - 49}{16 \sin^4 2x} - \right.$$

$$- \frac{(-12 - 4\cos 4x)\, 2\, (-4\cos 4x + 4)}{64 \sin^6 2x} +$$

$$\left. + 8 \frac{\left\{ \cos 4x \, [3 + 15 + 10\cos 4x - 21 - 14 \cos 4x - 9] - [5 + 21 + 14 \cos 4x - 27 - 18 \cos 4x - 11] \right.}{64 \sin^6 2x} \right\}$$

$-\,^{28}_{124}$

$$= \sin 2x \left\{ \frac{-96 - 32 \cos 4x}{16 \sin^4 2x} + \frac{8 (1 - \cos 4x)(3 + \cos 4x)}{\sin^6 2x} \right\} + \frac{\cos 4x [-12 - 4\cos 4x] - [-12 - 4 \cos 4x]}{8 \sin^6 2x}$$

$$-6 - 2\cos 4x + \frac{2(3 + \cos 4x)}{\sin^4 2x} = 0 \;!!!$$

Skończony kawał łańcucha

$$y_0 = y_0(0)\,J_0 + [y_1(0) + y_{-1}(0)]\,J_1 + [y_2 + y_{-2}(0)]\,J_2 + \cdots [y_{n-1} + y_{-n+1}(0)]\,J_{n-1} + [y_n + y_{-n}(0)]\,J_n +$$

$$-[y_{n-1} + y_{-n+1}(0)]\,J_{n+1}$$

$$-2y_0(0)\,J_{2n} - [y_1 + y_{-1}]\,J_{2n-1} - [y_2 + y_{-2}(0)]\,J_{2n-2}$$

$$-[y_1 + y_{-1}]\,J_{2n+1} - [y_2 + y_{-2}]\,J_{2n+2} \cdots - [y_{n-1} + y_{-n+1}]\,J_{3n-1} + [y_n + y_{-n}]\,J_{3n}$$

$$+2y_0\,J_{4n} + [y_1 + y_{-1}]\,J_{4n-1} + [y_2 + y_{-2}]\,J_{4n-2} \quad + \quad J_{3n+1}$$

$$y_1 = y_1(0)\,J_0 + [y_2 + y_0]\,J_1 + [y_3 + y_{-1}]\,J_2 + \quad + [y_n + y_{-n+2}]\,J_{n-1} + [-y_{n-1} + y_{-n+1}]\,J_n$$

$$-2y_1\,J_{2n} - [y_2 + y_0]\,J_{2n-1} - [y_1 + y_{-3}]\,J_{2n-2} - [y_{n-3} + y_{-n+1}]\,J_{n+2} - [+y_{n-2} + y_{-n}]\,J_{n+1}$$

$$-(y_2 + y_{-4})\,J_{2n-3}$$

$$-[y_0 + y_{-2}]\,J_{2n+1} - [y_1 + y_{-3}]\,J_{2n+2} - (y_2 + y_{-4})\,J_{2n+3} \quad -[y_{n-2} + y_{-n}]\,J_{3n-1} - [+y_{n-1} + y_{-n+1}]\,J_{3n}$$

$$+2y_1\,J_{4n} \quad y \quad J_{4n-1} \quad + [y_n + y_{-n+2}]\,J_{3n+1}$$

$$(y_1 - y_0) = (y_1 - y_0)\,J_0 + [y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]\,J_1 + [y_3 + y_{-1} - y_2 - y_{-2}]\,J_2 + \cdots [y_n + y_{-n+2} - y_{n-1} - y_{-n+1}]\,J_{n-1} +$$

$$+[-y_{n-1} + y_{-n+1} - y_n - y_{-n}]\,J_n - [y_{n-2} + y_{-n-2} - y_{-n+1} - y_{n-1}]\,J_{n+1} + \cdots - [y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]\,J_{2n-1} -$$

$$-2(y_{-1} - y_0) \qquad + - [y_2 + y_{-4} - y_3 - y_{-3}]\,J_{2n-3} - [y_1 + y_{-3} - y_2 - y_{-2}]\,J_{2n-2}$$

$$J_{2n} - [y_{-2} + y_0 - y_1 - y_{-1}]\,J_{2n+1} \quad \cdots\cdots \quad - [y_{n-1} - y_{-n+1} - y_n + y_{-n}]\,J_{3n} +$$

$$+[y_n + y_{-n+2} - y_{n-1} - y_{-n+1}]\,J_{3n+1} + [y_{n+1} + y_{-n+3} - y_{n-2} - y_{n+2}]\,J_{3n+2} \cdots + [y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]\,J_{4n-1}$$

$$+2(y_1 - y_0)\,J_{4n} + [y_0 + y_2 - y_1 - y_{-1}]\,J_{4n+1}$$

---

$$y_1 - y_0 = (y_1 - y_0)[J_0 + 2J_{4n} + 2J_{8n} + \cdots] + [y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}][J_1 + J_{4n-1} + J_{4n+1} + \cdots] +$$

$$[y_3 + y_{-1} - y_2 - y_{-2}][J_2 + J_{4n-2} + J_{4n+2} + \cdots] + \cdots + [y_n + y_{-n+2} - y_{n-1} - y_{-n+1}][J_{n-1} + J_{3n+1} + J_{5n-1} + \cdots]$$

$$+[-y_{n-1} + y_{-n+1} - y_n - y_{-n}][J_n + J_{3n} + J_{5n} + \cdots] + [-y_n - y_{n-2} + y_{-n+1} + y_{n-1}][J_{n+1} + J_{3n-1} + J_{5n+1} + \cdots]$$

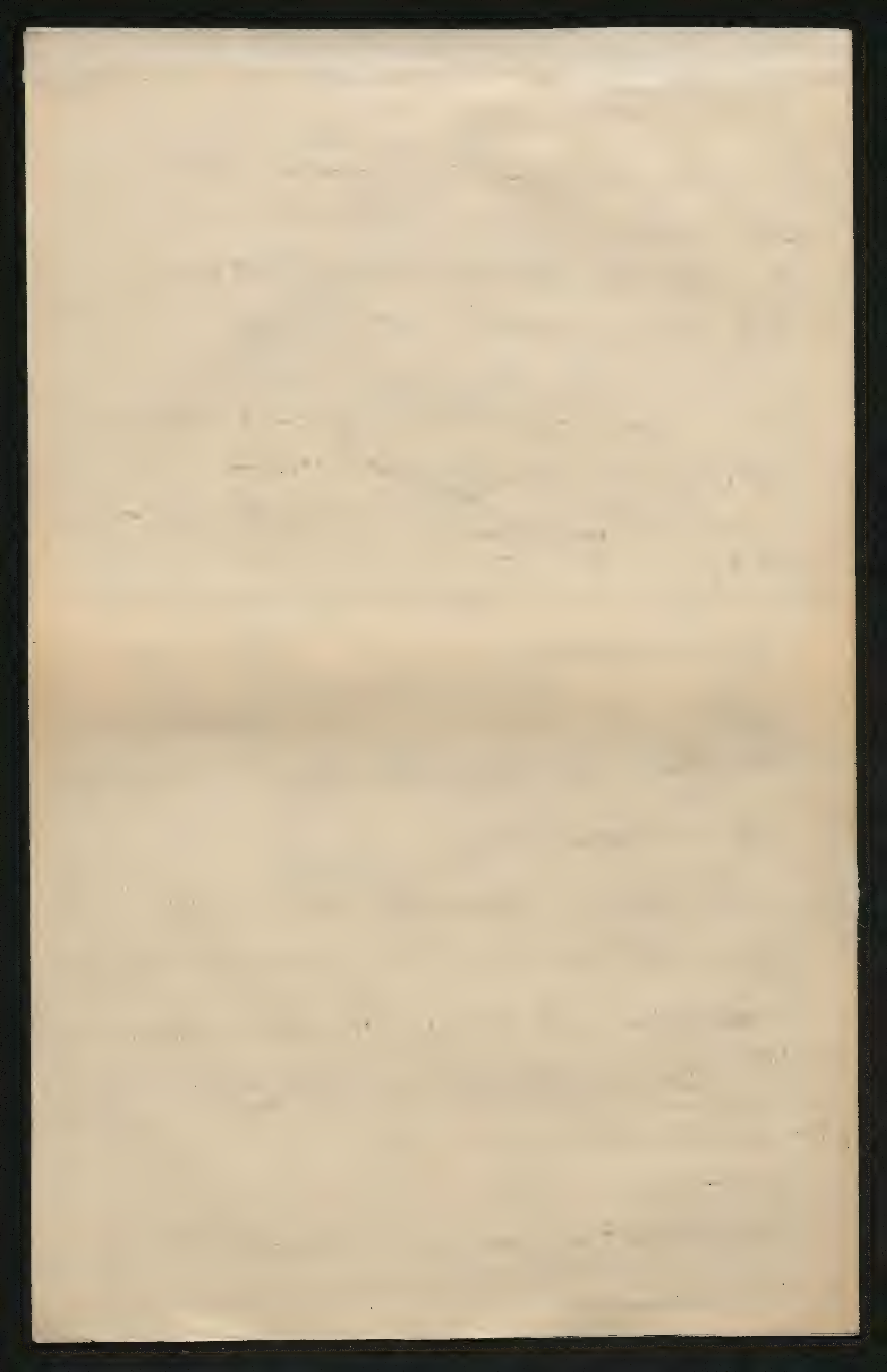
$$[-y_{-3} - y_1 + y_2 + y_{-2}] + \cdots [-y_{-2} - y_0 + y_1 + y_{-1}][J_{2n-1} + J_{2n+1} + J_{6n-1} + \cdots] + [2y_0 - 2y_{-1}][J_{2n} + J_{6n} + \cdots]$$

---

$$\frac{1}{2c}\dot{y}_0 = $$

$$y_0(0)[J_0' + 2J_{2n}' + 2J_{4n}' + \cdots] + [y_1 + y_{-1}][J_1' - J_{2n-1}' - J_{2n+1}' + J_{4n-1}' + J_{4n+1}' + \cdots] +$$

$$+[y_2 + y_{-2}][J_2' + J_{2n-2}' + J_{2n+2}' + J_{4n-2}' + J_{4n+2}' \cdots] \cdots [y_{n-1} + y_{-n+1}][J_{n-1}' - J_{n+1}' - J_{3n-1}' + J_{3n+1}' \cdots]$$



$$W = \frac{2\alpha}{m} \overline{\dot{y}_0 (y_1 - y_0)}$$

$$= \frac{4\alpha c}{m} \Big\{ .$$

$$-\overline{y_0}^2 \; [J_0 + 2J_{4n} + 2J_{8n} \cdots][J_0' - 2J_{2n}' + J_{4n}'] + [J_1 + J_{4n-1} + J_{4n+1} + \cdots][J_0' + J_{2n}' + J_{4n}' + \cdots]\overline{y_0}^2$$

$$-[J_{2n-1} + J_{2n+1} + J_{6n-1} \cdots] + [J_{2n} + J_{6n} + \cdots]$$

$$+\overline{y_1}^2 \Big\{ [J_0 + 2J_{4n} + 2J_{8n} + \cdots][J_1' - J_{2n-1}' - J_{2n+1}' + J_{4n-1}' + \cdots] - [J_1 + J_{4n-1} + J_{4n+1} + \cdots][J_1' - J_{2n-1}' - J_{2n+1}' + \cdots]$$

$$- [J_{2n-2} + J_{2n+2} + J_{6n-2} \cdots][J_1' - J_{2n-1}' - J_{2n+1}' + J_{4n-1}' + \cdots] + [J_{2n-1} + J_{2n+1} + J_{6n-1} + \cdots][J_1' - J_{2n-1}' - \cdots] \Big\}$$

$$+\overline{y_{-1}}^2 \; [J_1' - J_{2n-1}' - J_{2n+1}' + J_{4n-1}' - \cdots] \Big\{ -[J_1 + J_{4n-1} + J_{4n+1} + \cdots] + [J_2 + J_{4n-2} + J_{4n+2} \cdots] -$$

$$- [J_{2n-2} + J_{2n+2} + J_{6n-2} \cdots] + [J_{2n-1} + J_{2n+1} + \cdots] \Big\} \Big\}$$

---

wszędzie indeksy powinny być podwójnie większe!

$$W = \frac{4\alpha c}{m} \Big\{$$

$$+\overline{y_0}^2 \; [J_0' - 2J_{2n}' + 2J_{4n}' + \cdots]$$

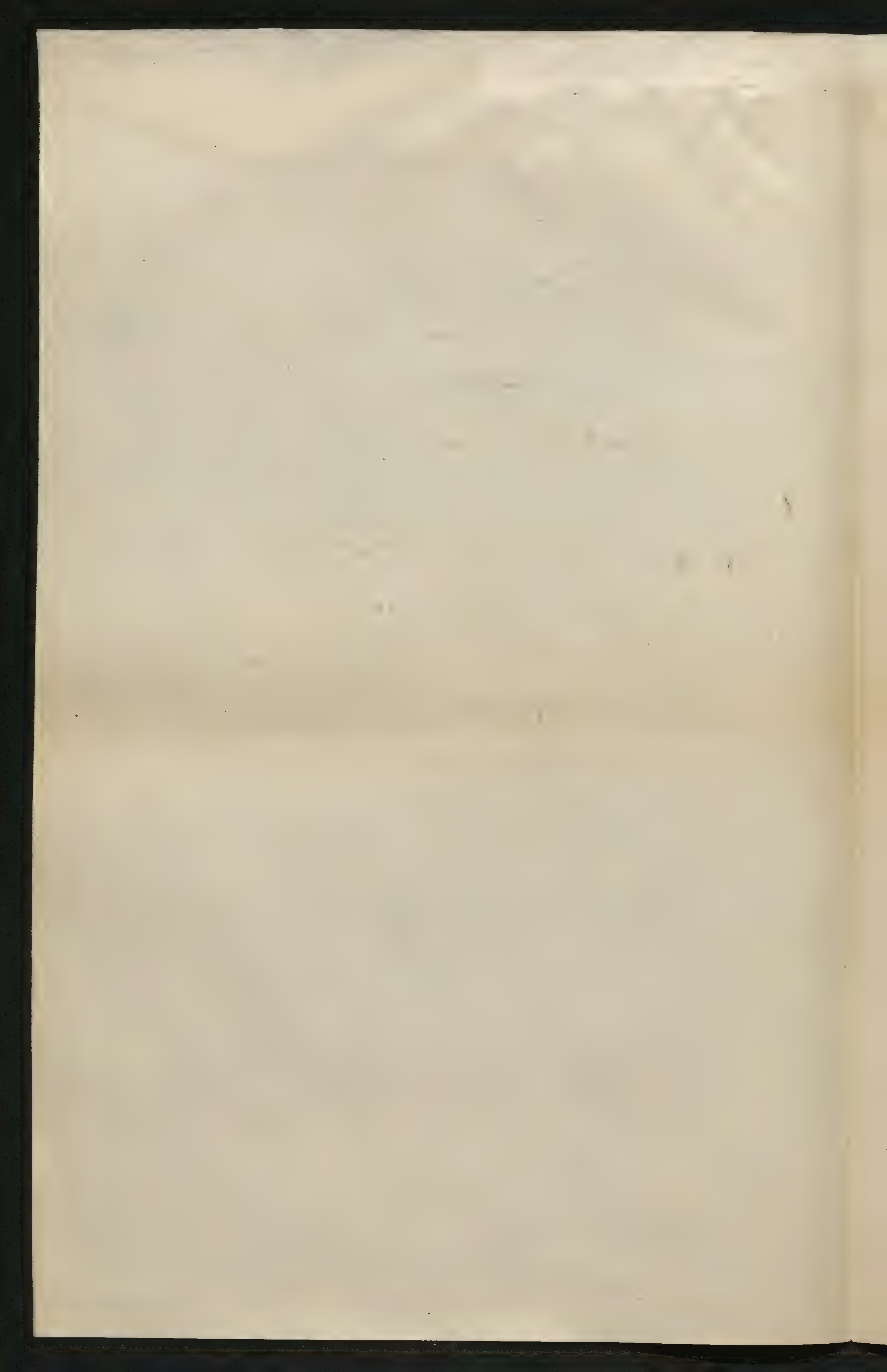
$$[-J_0 - J_{2n-1} + 2J_{2n} - J_{2n+1} + J_{4n-1} - 2J_{4n} + J_{4n+1} - J_{6n-1} + 2J_{6n} - J_{6n+1}]$$

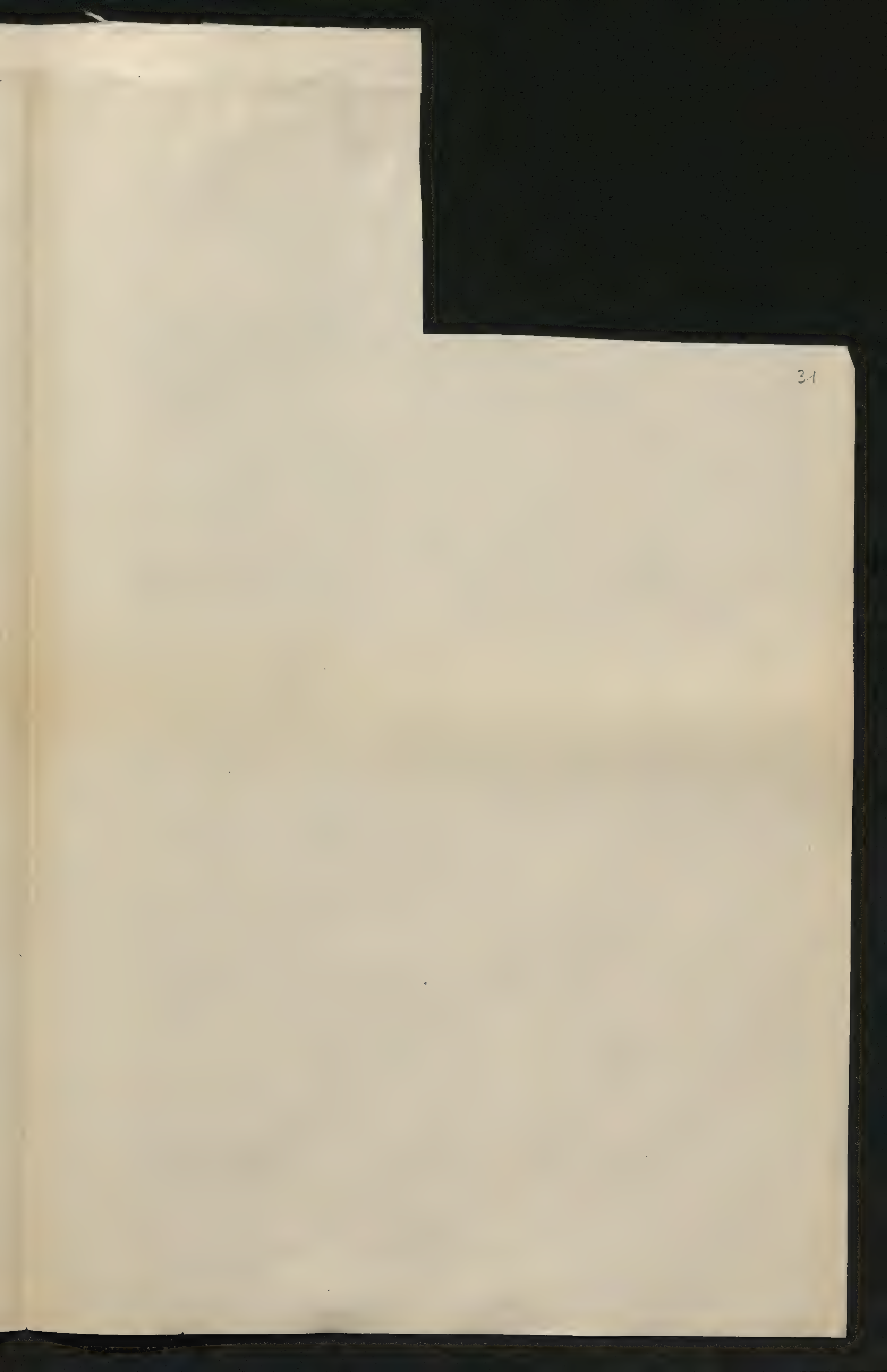
$$+\overline{y_1}^2 \; [J_1' - J_{2n-1}' - J_{2n+1}' + J_{4n-1}' \cdots][J_0 - J_1 - J_{2n-2} + J_{2n-1} + J_{2n+1} - J_{2n+2} - J_{4n-1} + 2J_{4n} - J_{4n+1}$$

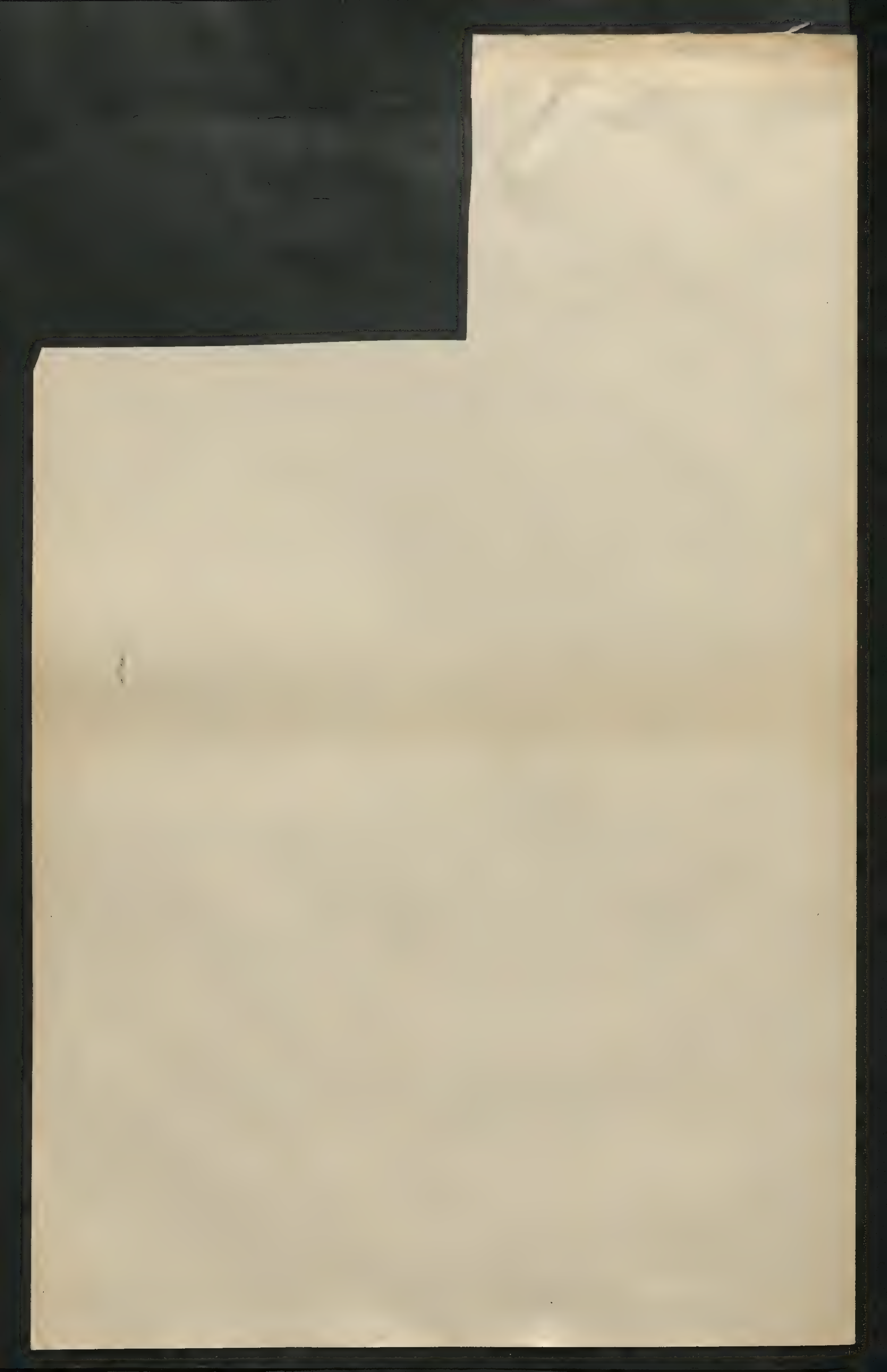
$$+\overline{y_{-1}}^2 [\qquad ][-J_1 + J_2 - J_{2n-2} + J_{2n-1} + J_{2n+1} - J_{2n+2} + J_{4n-2} - J_{4n-1} - J_{4n+1} + J_{4n+2}]$$

$$+\overline{y_2}^2 [J_2' - J_{2n-2}' - J_{2n+2}' + J_{4n-2}' + \cdots][J_1 - J_2 - J_{2n-3} + J_{2n-2} + J_{2n+2} - J_{2n+3} - J_{4n-2} + J_{4n-1} + J_{4n+1} - J_{4n+2}]$$

$$+\overline{y_{-2}}^2 [\qquad ][-J_2 + J_3$$







$$\int_{-2ct}^{+2ct}(1+\beta x)\,dx$$

$$\int_0^{2ct}(1+\beta x)\,dx - \int_0^{2ct}(1-\beta x)\,dx = 2\int_0^{2ct}\beta x\,dx = 2\beta \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2ct}$$

$$c\,\dot{y}_0(y_1-y_0)$$

$$\overline{W} = -\frac{2\alpha}{m}\,2\left[\dot{y}^2 + 2c\dot{y}^2\right]$$

$$\dot{y}_0^2\left[\sum_{k=2}(1+\beta k)\,J_k J_{k-1} - \sum_{k=0}'(1-\beta k)\,J_k J_{k+1}\right]$$

$$= \sum_{k=2}^{k}{}' J_k\Big[\underbrace{J_{k-1}-J_{k+1}}_{2J_k'} + \beta k\underbrace{(J_{k-1}+J_{k+1})}_{\frac{2k J_k}{x}}\Big] - J_0 J_1$$

$\overline{W} =$

$$= \frac{2\alpha}{m}\,2\dot{y}_0^2 \sum_{k=2}^{k=2ct}{}' J_k\left[J_k' + \beta\frac{k^2}{x}J_k\right] - J_0 J_1$$

$$\overline{W} = \frac{4\alpha}{m}\,\overline{\dot{y}_0^2}\,\beta \underbrace{\sum_{k=2}^{k=2ct}\frac{k^2\,\overline{J_k^2}}{x}}_{\neq \frac{8c^3t^3}{3(2ct)^2\pi}\frac{2}{1}\frac{\pi}{4}} \qquad \underbrace{\phantom{xx}}_{\frac{ct}{3}}$$

Czy mi tutaj lepiej zapomnieć zwłaszcza tylko o skończonym [illegible] Teśmiecha?

Semiconvergent:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left[1-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2}+\dots\right]\sin\left(x-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + \left[\frac{4\nu^2-1^2}{8x}-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!\,(8x)^3}\right]\cos\left(x-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right\}$$

dla $\nu$ parzystych:

$$=(-1)^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{\underbrace{\left[1-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2}+\dots\right]}_{1-\frac{\nu^4-\frac{5}{2}\nu^2+\frac{9}{16}}{8x^2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{\left[\;-\;\right]}_{\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2x}-}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big\}$$

w razie jeśli $\frac{\nu^2}{x}$ małe ale $\nu$ bardzo duże

$$\underbrace{\phantom{xxxx}}_{\neq\cos\left(\frac{\nu^2}{2x}\right)} \qquad \underbrace{\phantom{xxxx}}_{\neq\sin\left(\frac{\nu^2}{2x}\right)}$$

$$= \sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\nu^2}{2x}\right)$$

$$y_1 - y_0 = [y_1(0) - y_0(0)]\left[1 - c^2t^2 + \frac{c^4t^4}{4}\right] + [y_2(0) + y_0(0) - y_1(0) - y_{-1}(0)]\left[\frac{c^2t^2}{2} - \frac{c^4t^4}{6}\right] + [y_3 + y_{-1} - y_2 - y_{-2}]\frac{c^4t^4}{4!}$$

$$+ [\dot{y}_1(0) - \dot{y}_0]\left[t - \frac{c^2t^3}{3} + \frac{c^4t^5}{20}\right] + [\dot{y}_2(0) + \dot{y}_0(0) - \dot{y}_1 - \dot{y}_{-1}]\left[\frac{c^2t^3}{6} - \frac{c^4t^5}{30}\right] +$$

$\dot{y}_0 =$

$$\dot{y}_0 = -y_0\left[2c^2t + c^4t^3\right] + [y_1 + y_{-1}]\left[c^2t - \frac{2c^4t^3}{3}\right] + [y_2 + y_{-2}]\frac{c^4t^3}{6}$$

$$+ \dot{y}_0\left[1 - \frac{c^2t^2}{2} + \frac{c^4t^4}{4}\right] + [\dot{y}_1 + \dot{y}_{-1}]\left[\frac{c^2t^2}{2} - \frac{c^4t^4}{6}\right] + [\dot{y}_2 + \dot{y}_{-2}]\frac{c^4t^4}{4!}$$

$$W = y_0[y_1 - y_0]\left[-2c^2t + 3c^4t^3\right] + y_0[\dot{y}_1 - \dot{y}_0]\left[-2c^2t^2\right]$$

$$+[y_1 + y_{-1}][y_1 - y_0]\,c^2t + [y_1 + y_{-1}][\dot{y}_1 - \dot{y}_0]\,c^2t^2$$

$$+\dot{y}_0[y_1 - y_0]\left[1 - \frac{3}{2}c^2t^2\right] + \dot{y}_0[\dot{y}_1 - \dot{y}_0]\,t \quad - \dot{y}_0[y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]\frac{c^2t^2}{2}$$

$$+(y_1 - y_0)(\dot{y}_1 + \dot{y}_{-1})\frac{c^2t^2}{2} +$$

$$= c^2t\left\{(y_1 + y_{-1} - 2y_0)(y_1 - y_0)\right\} + \dot{y}_0(y_1 - y_0) + c^2t^2\Big\{(y_1 + y_{-1} - 2y_0)(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - \frac{3}{2}\dot{y}_0(y_1 - y_0)$$

$$+ \dot{y}_0(\dot{y}_1 - \dot{y}_0)t \qquad + \frac{\dot{y}_0}{2}(y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}) + \frac{(y_1 - y_0)(\dot{y}_1 + \dot{y}_{-1})}{2}\Big\}$$

$$W_0 = \dot{y}_0(y_1 - y_0)$$

$$\dot{y}_0\int_{-\infty}^{+\infty}(y_1 - y_0)\,e^{\frac{-cy_1^2}{\alpha\theta_0}(1+\beta)}\,dy_1 = \quad \dot{y}_0\,y_0\sqrt{\frac{\pi\,\alpha\theta_0}{c\,(1+\beta)}}$$

$c\rho l^3$ $c_v\rho \sim \frac{1}{l^3}$ $\frac{c\lambda}{l^3}$

$\kappa = c_v\frac{c\rho l}{3}$

$\mu = \frac{c\rho l}{3}$

---

$$\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x}q\,t = Q$$

$$\kappa = \frac{Q}{q\,t\,\frac{\partial\theta}{\partial x}} = \frac{1}{at} = \frac{c}{a^2} \times \varepsilon$$

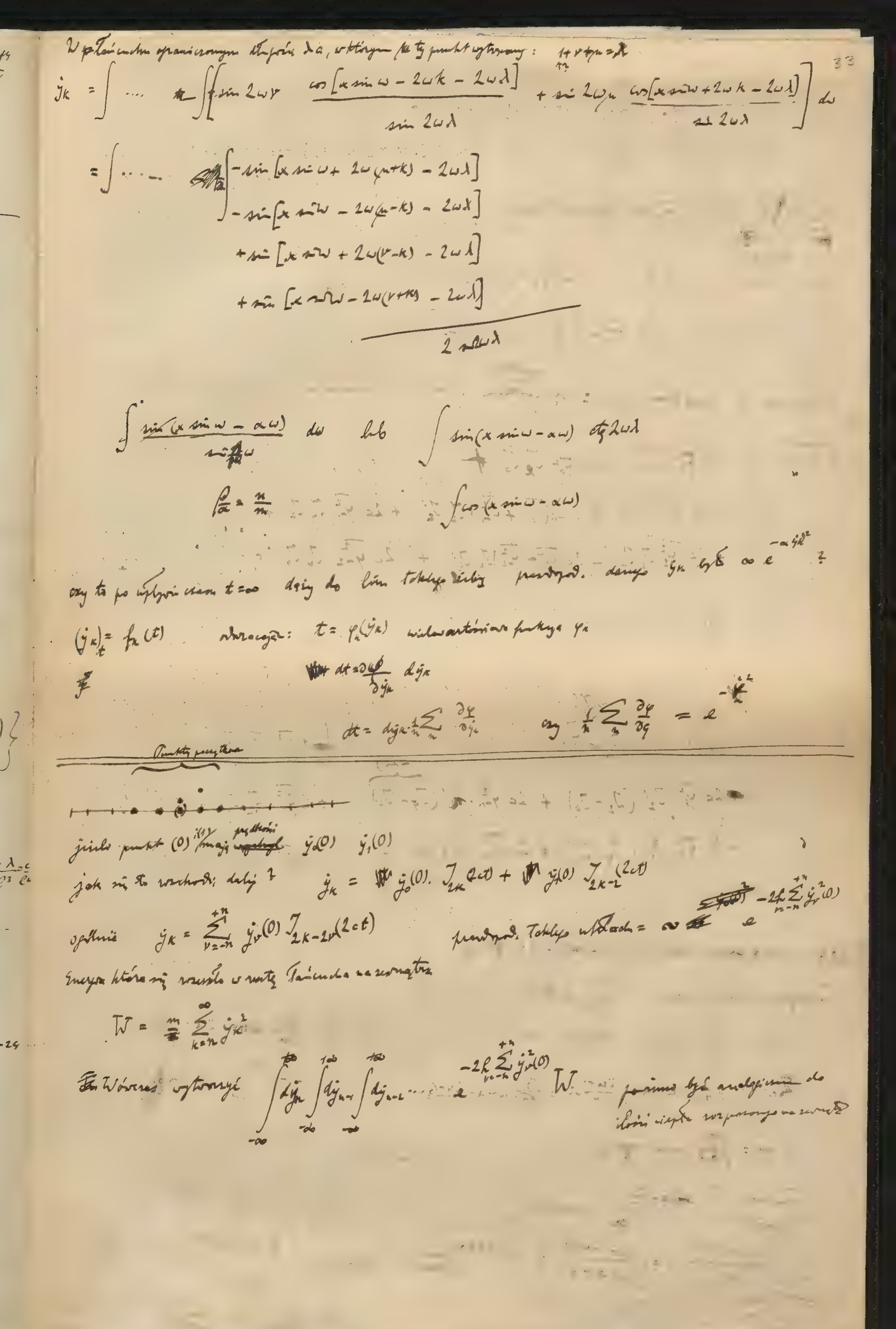
$$\varepsilon\,\frac{1^\circ}{1\,cal} = \frac{0.0013\,.\,(48000)^2}{4.10^{19}\,.\,2\,.\,273\,.\,4.2.10^7}$$

$$= \frac{.\,1.3.10^5}{4.\,10^{28}} = 3.10^{-24}$$

$$\kappa = \frac{10^5}{(10^{-8})^2} = 10^{21}\,.\,3.10^{-24} = 0.003\left[\frac{cal}{}\right]!$$

$$-kc\left[(y_0 - y_1)^2 + y_0^2 + y_1^2\right]$$

rany tek : pravdp. $y_1\ y_0$ $\infty$ $\varepsilon$





W płaszczyźnie ograniczonym długości $\lambda a$, w którym [illegible] punkt ustawiony: $\mu+\nu+\mu=\lambda$

$$\dot{y}_k = \int \cdots \iint \left[ \sin 2\omega\nu \frac{\cos[x\sin\omega - 2\omega k - 2\omega\lambda]}{\sin 2\omega\lambda} + \sin 2\omega\mu \frac{\cos[x\sin\omega + 2\omega k - 2\omega\lambda]}{\sin 2\omega\lambda} \right] d\omega$$

$$= \int \cdots \frac{1}{2} \frac{\begin{array}{l} -\sin[x\sin\omega + 2\omega(\mu+k) - 2\omega\lambda] \\ -\sin[x\sin\omega - 2\omega(\mu-k) - 2\omega\lambda] \\ +\sin[x\sin\omega + 2\omega(\nu-k) - 2\omega\lambda] \\ +\sin[x\sin\omega - 2\omega(\nu+k) - 2\omega\lambda] \end{array}}{2\sin 2\omega\lambda}$$

$$\int \frac{\sin(x\sin\omega - \alpha\omega)}{\sin\omega} d\omega \quad \text{lub} \quad \int \sin(x\sin\omega - \alpha\omega) \operatorname{ctg} 2\omega\lambda$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{m} \qquad \int \cos(x\sin\omega - \alpha\omega)$$

czy to po upływie czasu $t=\infty$ dąży do limes takiego rozkładu prawdopod. danego $\dot{y}_k$ typu $\infty e^{-\alpha \dot{y}_k^2}$?

$(\dot{y}_k)_t = f_k(t)$ odwrócenie: $t = \varphi_k(\dot{y}_k)$ wielowartościowa funkcja $\dot{y}_k$

$$dt = \frac{\partial\varphi}{\partial \dot{y}_k} d\dot{y}_k$$

$$dt = d\dot{y}_k \frac{1}{n}\sum_n \frac{\partial\varphi}{\partial \dot{y}_k} \qquad \text{czy} \quad \frac{1}{n}\sum \frac{\partial\varphi}{\partial q} = e^{-\dot{y}_k^2}$$

---

Punkty początkowe

jeżeli punkt (0) i (1) mają prędkości $\dot{y}_0(0)$ $\dot{y}_1(0)$

jak się to rozchodzi dalej?  $\dot{y}_k = \dot{y}_0(0)\, J_{2k}(2ct) + \dot{y}_1(0)\, J_{2k-2}(2ct)$

ogólnie $\dot{y}_k = \sum_{\nu=-n}^{+n} \dot{y}_\nu(0)\, J_{2k-2\nu}(2ct)$  prawdopod. takiego układu $= \infty\, e^{-2h\sum_{\nu=-n}^{+n} \dot{y}_\nu^2(0)}$

Energia która się rozeszła w rurze łańcucha na zewnątrz

$$W = \frac{m}{2}\sum_{k=n}^{\infty} \dot{y}_k^2$$

Wówczas wyrażenie $\int_{-\infty}^{+\infty} d\dot{y}_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\dot{y}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\dot{y}_{n-2} \cdots e^{-2h\sum_{\nu=-n}^{+n} \dot{y}_\nu^2(0)}\, W$ powinno być analogiczne do ilości ciepła rozproszonego na zewnątrz

$$y_1 - y_0 = [y_1(0) - y_0(0)] J_0 + [y_0(0) + y_2(0) - y_1(0) - y_{-1}(0)] J_2 + [y_{-1}(0) + y_3 - y_2 - y_{-2}] J_4 + \dots$$

$$+ [\dot y_1 - \dot y_0] \int J_0 dt + [\dot y_0 + \dot y_2 - \dot y_1 - \dot y_{-1}] \int J_2 dt + [\dot y_{-1} + \dot y_3 - \dot y_2 - \dot y_{-2}] \int J_4 dt - \dots$$

$$\dot y_0 = \left( 2c\, y_0 J_0' + 2c [y_1 + y_{-1}] J_2' + 2c [y_2 + y_{-2}] J_4' + \dots \right.$$

$$+ \dot y_0 J_0 + [\dot y_{-1} + \dot y_{+1}] J_2 + [\dot y_{-2} + \dot y_{+2}] J_4 + \dots$$

Przyjmując że początkowe $y_k$ $\dot y_k$ są wszystkie całkiem od siebie niezależne: $\int y_k y_i = 0$ etc.

$W =$

$$\frac{2\alpha}{m} \overline{\dot y_0 (y_1 - y_0)} = -2c \overline{y_0^2} J_0 J_0' + 2c \overline{y_0^2} J_2 J_0' +$$

$$+ 2c \overline{y_1^2} J_0 J_2' - 2c(\overline{y_1^2} + \overline{y_{-1}^2}) J_2 J_2' + 2c \overline{y_{-1}^2} J_4 J_2' +$$

$$+ 2c \overline{y_2^2} J_2 J_4' - 2c(\overline{y_2^2} + \overline{y_{-2}^2}) J_4 J_4' + 2c \overline{y_{-2}^2} J_6 J_4' + \dots$$

$$+ \left\{ \overline{\dot y_0^2} J_0 \int J_0 dt + \dots \right\}$$

$$= 2c \overline{y_0^2} J_0' \overbrace{(J_2 - J_0)}^{-2J_1'}$$

$$- 2c \overline{y_1^2} J_2' (J_2 - J_0) + 2c \overline{y_{-1}^2} J_2' \overbrace{(J_4 - J_2)}^{-2J_3'}$$

$$- 2c \overline{y_2^2} J_4' (J_4 - J_2) + 2c \overline{y_{-2}^2} J_4' (J_6 - J_4)$$

$\dots$

$$+ 2\overline{\dot y_0^2} J_0 J_1$$

$$+ 2\overline{\dot y_1^2} J_2 J_1 - 2\overline{\dot y_{-1}^2} J_2 J_3$$

$$+ 2\overline{\dot y_2^2} J_4 J_3 - 2\overline{\dot y_{-2}^2} J_4 J_5$$

~~$J_k J_{k+1} = \frac{1}{\pi} \int \cos(x \sin\omega - k\omega) d\omega \cos(x \sin\varphi - (k+1)\varphi) d\varphi$~~

Po upływie dużego czasu $J_{2k}(2ct) =$

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right) \quad n < x$$

$$J_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

$$J'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

~~$J'_{n+1}(x) = \sqrt{\dots} \sin(x - \frac{2n-1}{}$~~

$$J_{n+1} J_n = \frac{1}{\pi x} \sin\left(2x - \frac{2n-1}{2}\pi\right)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\pi x} \cos 2x$$

$$J_{n+1} J_n' = \nearrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2x = 2k\pi}^{2k\pi + 2\pi} \frac{\cos 2x \, dx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x \, dx}{2k\pi + x} = \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx \left[\frac{1}{2k\pi + x} - \frac{1}{(2k+1)\pi + x}\right] = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx \left[\frac{1}{2k\pi + x} - \frac{1}{(2k\pi)\pi - x}\right]$$

$2x = \varphi$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2k\pi}^{2k\pi + 2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\varphi} =$$

$$\mp \frac{\alpha}{(2k\pi)^2} \mp \frac{\alpha}{x^2}$$

$$y_1 - y_0 = y_0 \Big[ - J_0 + J_2 \,|\, - J_{4n-2} + 2 J_{4n} - J_{4n+2} \,|\, + J_{8n-2} \dots$$
$$+ J_0 - J_2 \,|\, - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} \,|\, - J_{8n-2} + 2 J_{8n} - J_{8n+2} \Big]$$

$$+ y_0 \beta \Big\{ \Big[ J_0 + \; - J_2 \;\; - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} - J_{8n-2} + 2 J_{8n} - J_{8n+2}$$
$$+ J_2 \;\; - J_4 \,|\, - J_{4n-2} + 2 J_{4n} \;\; - J_{4n+2} \,|\, - J_{8n-4} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+4}$$

$$= J_0 - J_4 \,|\, - J_{4n-4} + 2 J_{4n} - J_{4n+4} \,|\, - J_{8n-4} + 2 J_{8n} - J_{8n+4} \,|$$

$$+ 2 \Big[ J_2 - J_4 \,|\, - J_{4n-6} + J_{4n-4} + J_{4n+4} - J_{4n+6} \,|\, - J_{8n-4} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+4}$$
$$+ J_4 - J_6 \;\; - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} \,|\, - J_{8n-6} + J_{8n-4} + J_{8n+4} - J_{8n+6}$$

$$= J_2 - J_6 \,|\, - J_{4n-6} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+6} \,|\, - J_{8n-6} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+6} \,|$$

$$+ 3 \Big[ J_4 - J_6 \;\; - J_{4n-8} + J_{4n-6} + J_{4n+6} - J_{4n+8}$$
$$+ J_6 - J_8 \;\; - J_{4n-6} + J_{4n-4} + J_{4n+4} - J_{4n+6}$$

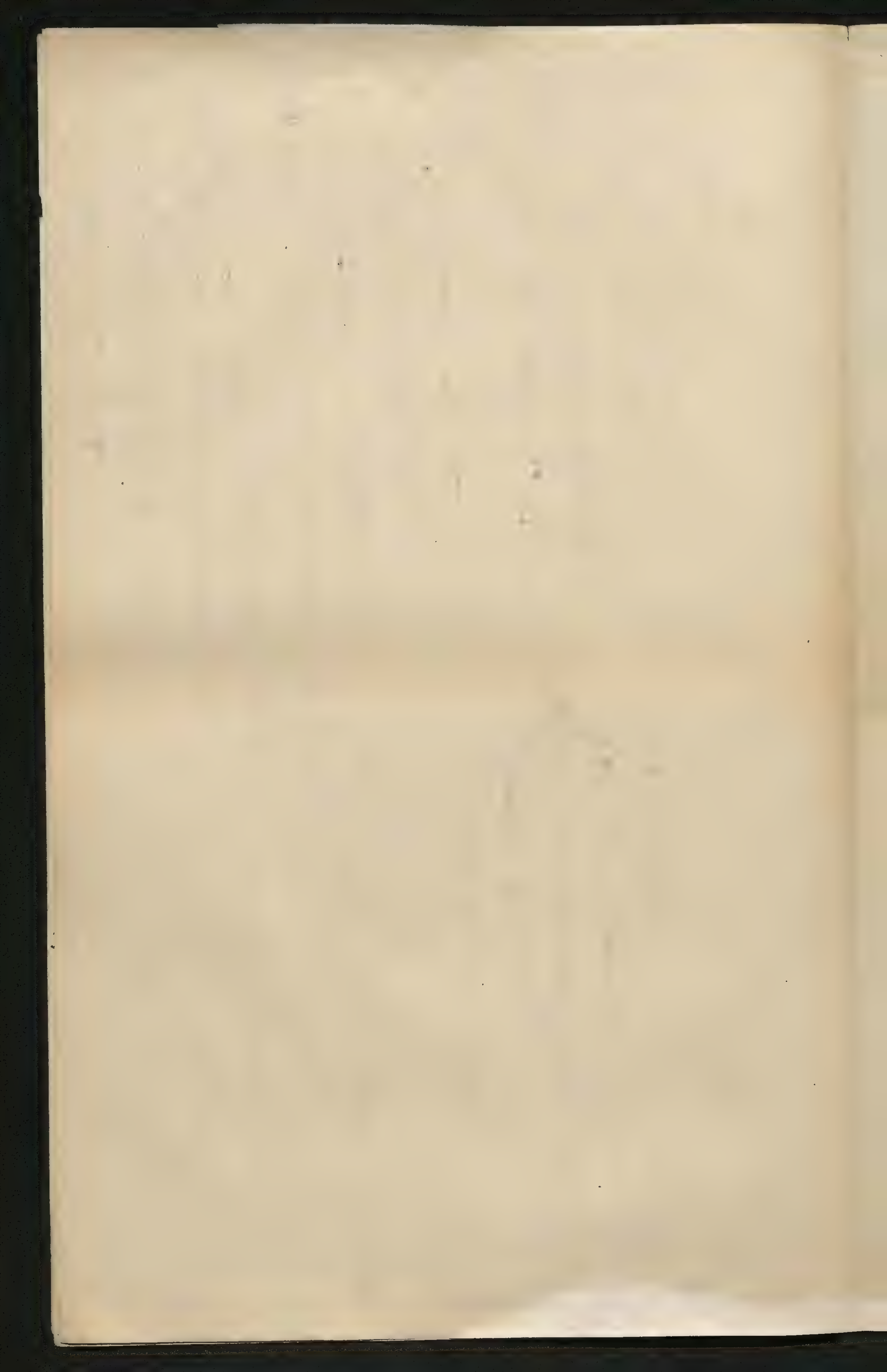
$$= J_4 - J_8 \,|\, - J_{4n-8} + J_{4n-4} + J_{4n+4} - J_{4n+8} \,| \dots$$

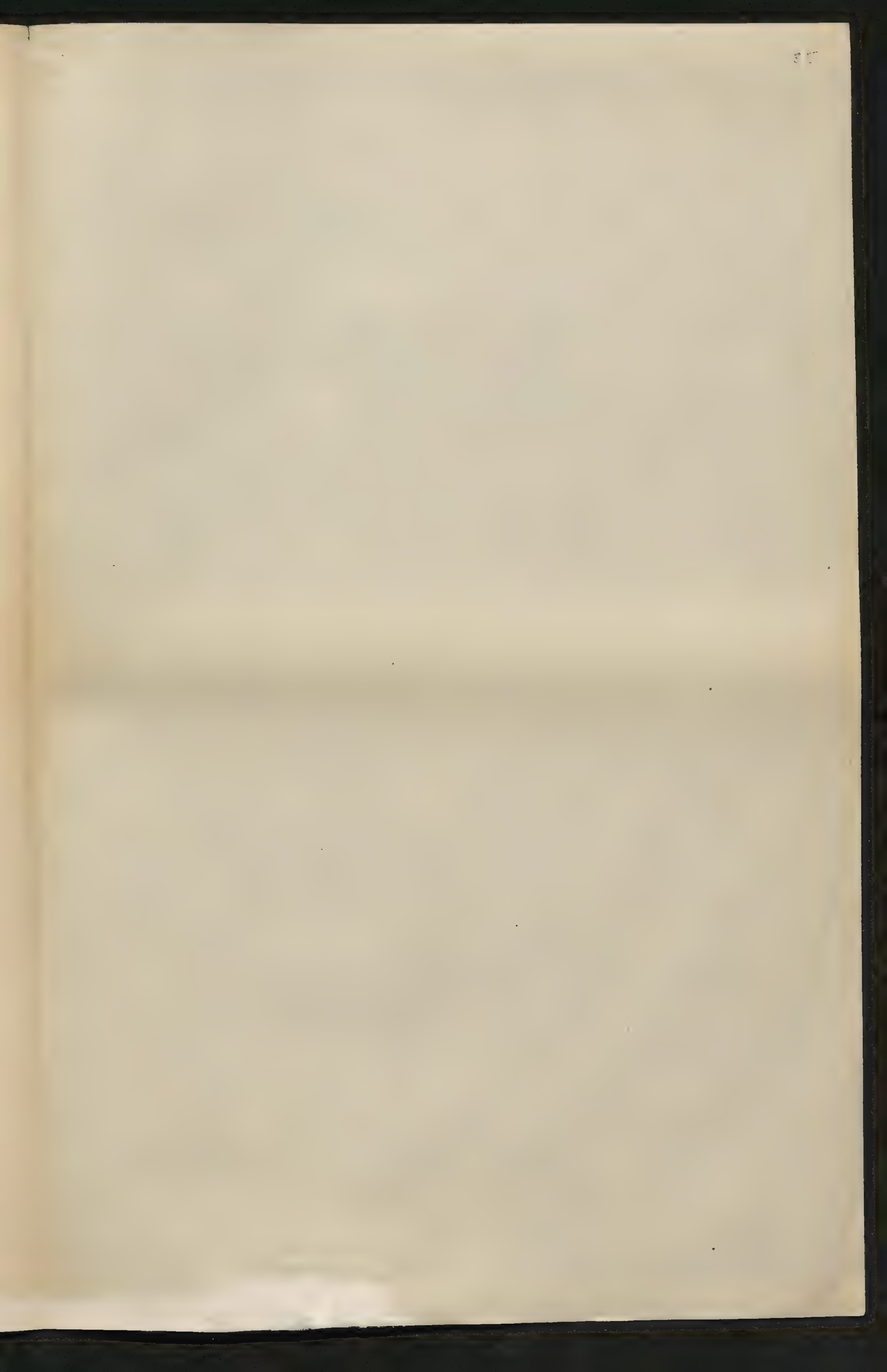
---

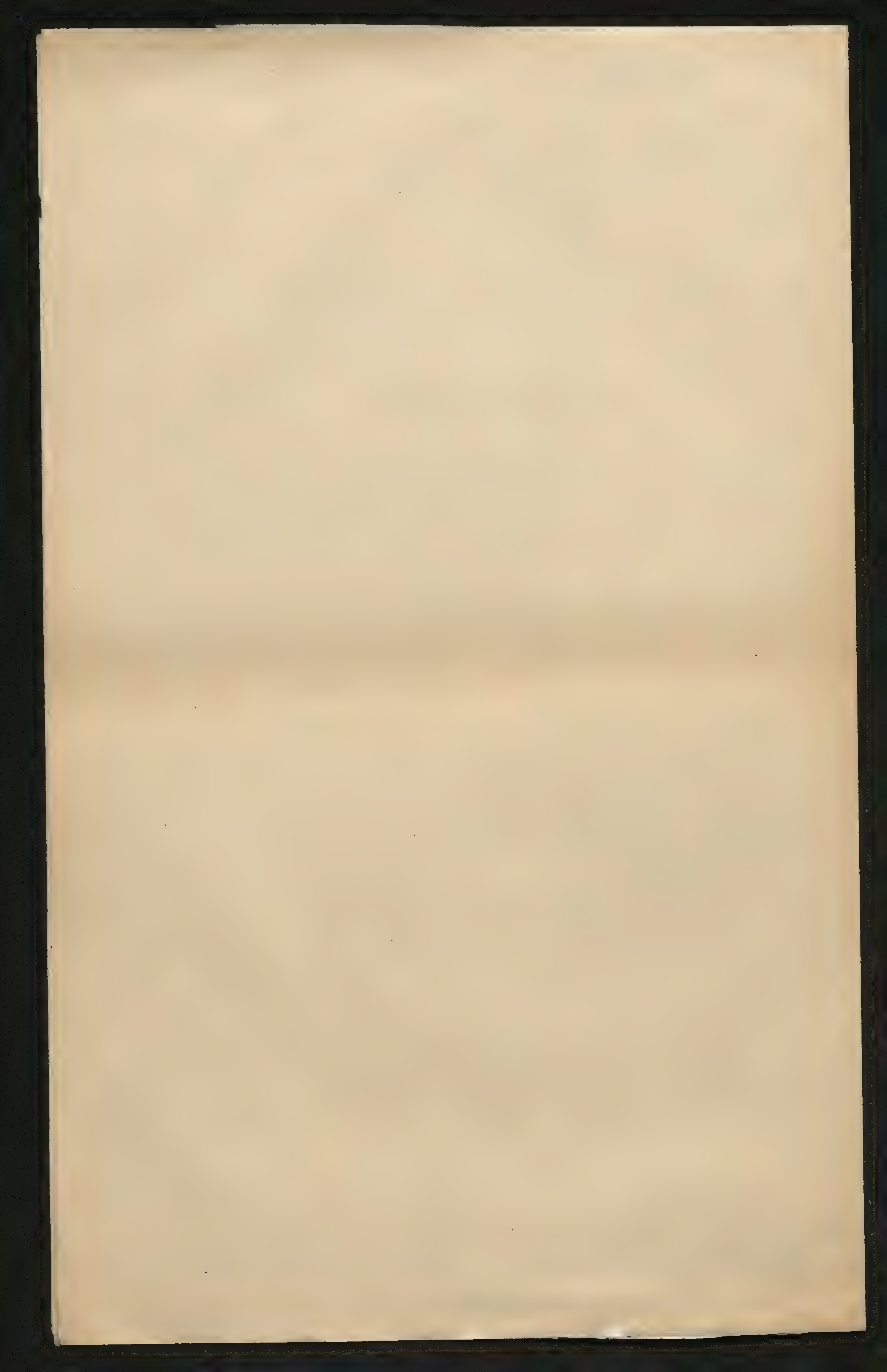
$$\{ \quad \} = y_0 \beta \Big\{ \Big[ J_1' \;\; - J_{4n-3}' + J_{4n+3}' - J_{8n-1}' + J_{8n+1}' \dots$$
$$+ J_3' \;\; - J_{4n-1}' + J_{4n+1}' - J_{8n-3}' + J_{8n+3}' \Big]$$
$$+ 2 \Big[ J_3' \;\; - J_{4n-5}' + J_{4n+5}' - $$
$$+ J_5' \;\; - J_{4n-3}' + J_{4n+3}' - $$
$$+ 3 \Big[ J_5' \;\; - J_{4n-7}'$$
$$+ J_7' \;\; - J_{4n-5}'$$

przypomnienie: $\frac{2\nu}{x} J_\nu' = J_{\nu-1}' + J_{\nu+1}'$

$$= \frac{2 y_0 \beta}{x} \Big\{ \Big[ 2 J_2' - (4n-2) J_{4n-2}' + (4n+2) J_{4n+2}' - (8n-2) J_{8n-2}' \Big] \times \Big[ J_2' - J_{4n-2}' - J_{4n+2}' + \dots \Big]$$
$$+ 2 \Big[ 4 J_4' - (4n-4) J_{4n-4}' + (4n+4) J_{4n+4}' \dots \Big] \times \Big[ J_4' - J_{4n-4}' + \dots$$
$$+ 3 \Big[ 6 J_6' - (4n-6) J_{4n-6}' + \qquad \Big] \times \Big[ J_6' \dots \Big\}$$







Praca wykonana podczas czasu $dt$ przez ruch punktu $y_0$ względem punktu $y_1$

$$W = \int_0^t \dot{y}_0 \, c(y_1 - y_0)\, dt = c\int (y_1 - y_0)\, dy_0$$

$$y_0 = y_0(0)\,J_0(2ct) + y_1(0)\,J_2(2ct) + y_2(0)\,J_4(2ct) + y_{-1}(0)\,J_2(2ct) + y_{-2}(0)\,J_4(2ct)$$

$$y_1 = y_1\,J_0(2ct) + y_0(0)\,J_2(2ct) + y_{-1}(0)\,J_4(2ct) + y_2(0)\,J_2(2ct) + \dots$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}_0(0) + 2c\left[y_1(0)\,J_2'(2ct) + y_2(0)\,J_4'(2ct) + y_{-1}(0)\,J_2'(2ct) + \dots\right]$$

$$y_1 - y_0 = [y_1(0) - y_0(0)]\,J_0(2ct) + [y_0(0) + y_2(0) - y_1(0) - y_{-1}(0)]\,J_2(2ct) + [y_{-1} + y_3 - y_2 - y_{-2}(0)]\,J_4(2ct) + \dots$$
$$+ [\dot{y}_1(0) - \dot{y}_0(0)]\int J_0(2ct)\,dt + [\dot{y}_0(0) + \dot{y}_2(0) - \dot{y}_1(0) - \dot{y}_{-1}(0)]\int J_2(2ct) + \dots$$

---

$$E = U + T = \sum \frac{m}{2}\dot{y}_k^2 + \alpha \sum\left[(y_1 - y_0)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + \dots + (y_0 - y_{-1})^2 + (y_{-1} - y_{-2})^2 + \dots\right]$$

---

$$y_0 = y_0(0)\,J_0(2ct) + [y_1(0) + y_{-1}(0)]\,J_2(2ct) + [y_2(0) + y_{-2}(0)]\,J_4(2ct) + \dots$$
$$+ \dot{y}_0(0)\int_0^t J_0(2ct)\,dt + [\dot{y}_1(0) + \dot{y}_{-1}(0)]\int_0^t J_2(2ct)\,dt + \dots$$

---

$S = \int$ [illegible] $d$

W każdej części takie odchylenia jednakowo ta część się znajduje w terminie równowagi

prawdop. wystąpienia $y_k\ \dot{y}_k \sim e^{-\left[\frac{\dot{y}_k^2 + y_k^2 c}{2\theta_k}\right]} dy_k\, d\dot{y}_k$

$$S = \int \dots e^{-\left[\frac{\frac{m}{2}\dot{y}_k^2 + c\,y_k^2}{\alpha\theta_0}\right][1 + \beta k]}\, dy_k\, d\dot{y}_k \int \dots W$$

W Pasiewicza tutaj tworzyć $\iiint E\, dy_i\, d\dot{y}_i$ przez całkowanie według wszystkich $i$ z wyjątkiem $i = k$

$$c\int \dot{y}_0 (y_1 - y_0)\,dt = -c\frac{y_0^2}{2} + c\int \dot{y}_0\, y_1\, dt$$

$S$ powinno wypaść niezależne od czasu $t$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots$$

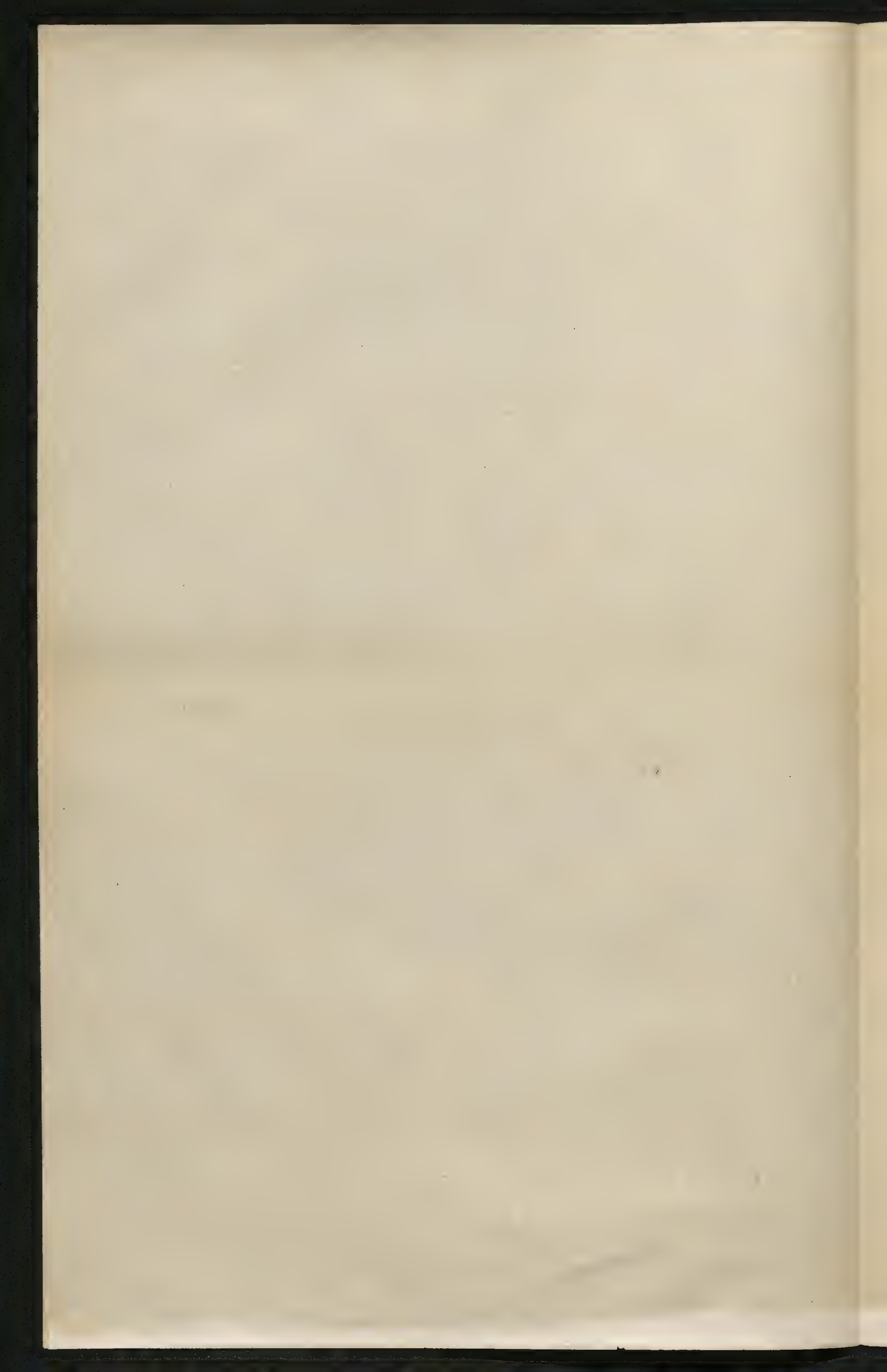
$$J_2 = \frac{x^2}{8}\left[1 - \frac{x^2}{12} + \dots\right.$$

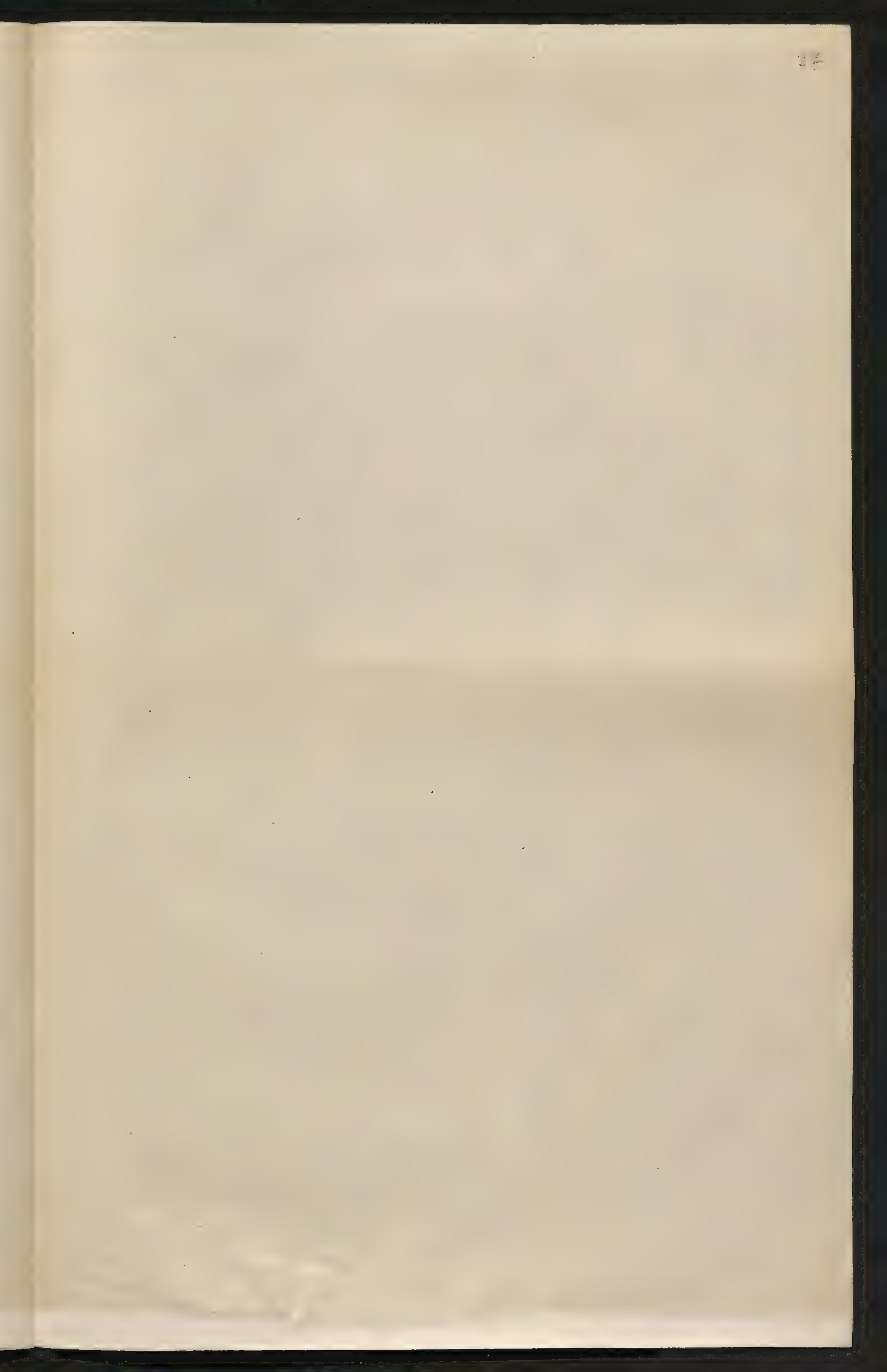
$$J_4 = \frac{x^4}{4!\,2^4}\left[1 - \frac{x^2}{20} + \dots\right.$$

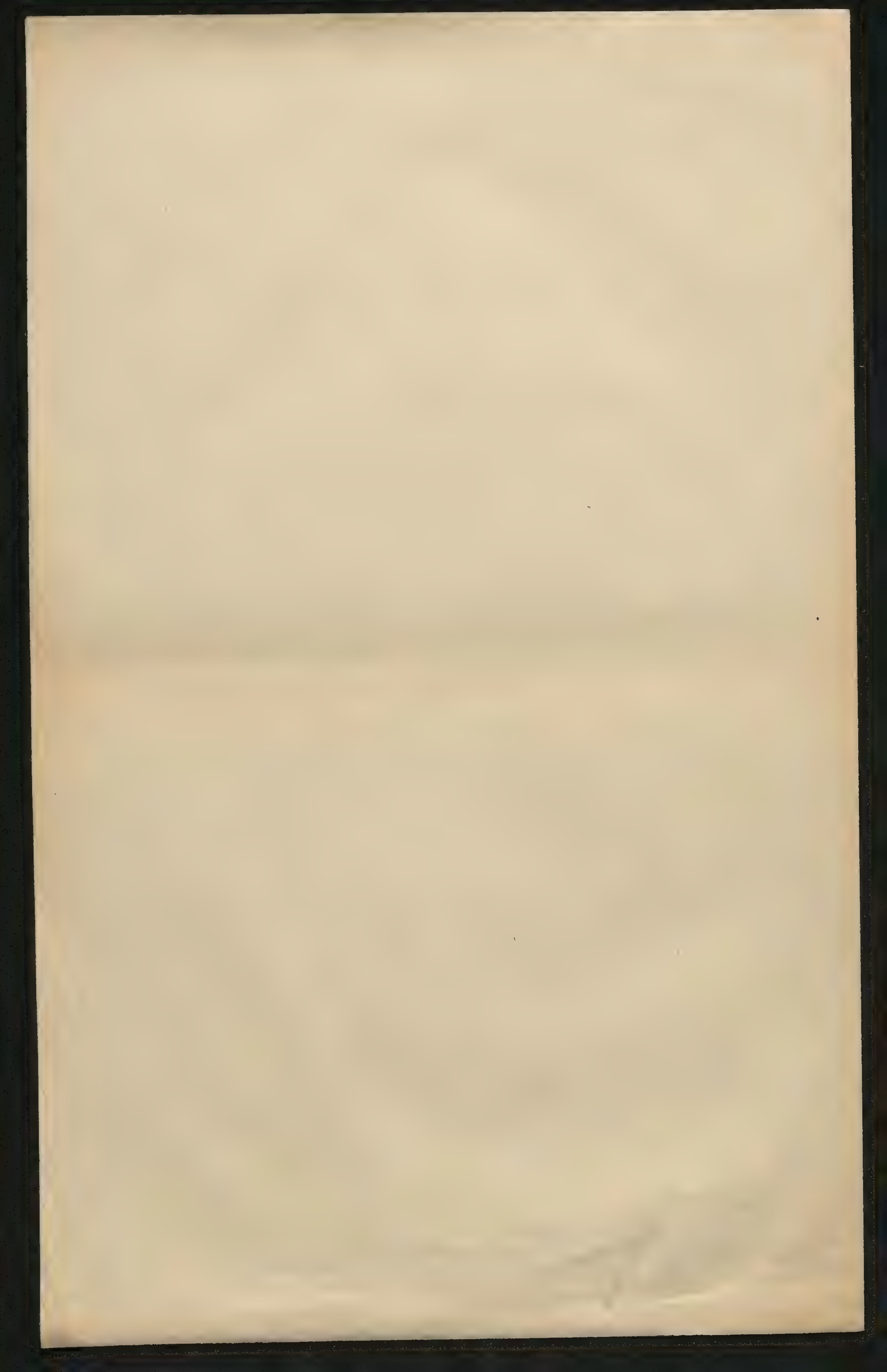
$$\int J_0\, dt = \left[t - \frac{c^2t^3}{3} + \frac{c^4t^5}{20}\right]$$

$$y_0 = y_0(0)\left[1 - c^2t^2 + \frac{c^4t^4}{4}\right] + [y_1(0) + y_{-1}(0)]\frac{c^2t^2}{2!}\left[1 - \frac{c^2t^2}{3}\right]$$
$$+ [y_2(0) + y_{-2}(0)]\frac{c^4t^4}{4!}$$
$$+ \dot{y}_0(0)\left[t - \frac{c^2t^3}{3} + \frac{c^4t^5}{20}\right] + [\dot{y}_1(0) + \dot{y}_{-1}(0)]\left[\frac{c^2t^3}{6} - \frac{c^4t^5}{30}\right]$$
$$+ [\dot{y}_2(0) + \dot{y}_{-2}(0)]\frac{c^4t^5}{5!}$$

$$y_0 = y_0(0) + \dot{y}_0(0)\,t + t^2c^2\left[\frac{y_1(0) + y_{-1}(0)}{2} - y_0(0)\right] + \frac{c^2t^3}{3}\left[\frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_{-1}(0)}{2} - \dot{y}_0(0)\right] + \dots$$







Taśmowa (N+1) punktowa [diagram: N+1, μ, ν]

Końcowe w początku

$$y_k = J_{2k} - J_{2(2\nu-k)} - J_{2(2\mu+k)} + J_{2(2\nu+2\mu-k)} + J_{2(2\nu+2\mu+k)} - J_{2(4\nu+2\mu-k)}$$

$$= \int \cos(x \sin\omega - 2k\omega) + \sum$$

| | |
|---|---|
| $2\nu-k$ | $2\nu+2\mu-k$ |
| $4\nu+2\mu-k$ | $4\nu+4\mu-k$ |
| $6\nu+4\mu-k$ | $6\nu+6\mu-k$ |
| $2\mu+k$ | $2\mu+2\nu+k$ |
| $4\mu+2\nu+k$ | $4\mu+4\nu+k$ |
| ... | |

Rachując położenie punktu k względem początku struny

[diagram: μ, punkt początkowy, k, λ]

$$y_k = J_{2(k-\mu)} - J_{2(2\lambda-\mu-k)} + J_{2(2\lambda+\mu-k)} - J_{2(4\lambda-\mu-k)} + J_{2(4\lambda+\mu-k)}$$

$$- J_{2(2\lambda-\nu+k)} + J_{2(2\lambda+\nu+k)} - \dots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[x \sin\omega - 2(k-\mu)\omega]\, d\omega$$

$$- \int \sum_{n=1}^{\infty} \cos[x \sin\omega - 2\omega(2\lambda n-(\mu+k))]\, d\omega \quad + \sum \cos[x \sin\omega - 2\omega(2n\lambda+\mu-k)]$$

$$- \sum \cos[x \sin\omega - 2\omega(2n\lambda-\nu+k)]\, d\omega \quad + \sum \cos[x \sin\omega - 2\omega(2n\lambda+\nu+k)]$$

---

$$= \int \dots \quad 2\sum \sin[x\sin\omega - 2\omega(2n\lambda-k)] \sin 2\omega\mu$$

$$+2\sum \sin[x \sin\omega - 2\omega(2n\lambda+k)] \sin 2\omega\nu$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha - n\beta) = \cos\alpha\,[\underbrace{\cos\beta + \cos 2\beta + \dots}_{A}] + \sin\alpha\,[\sin\beta + \sin 2\beta + \dots]$$

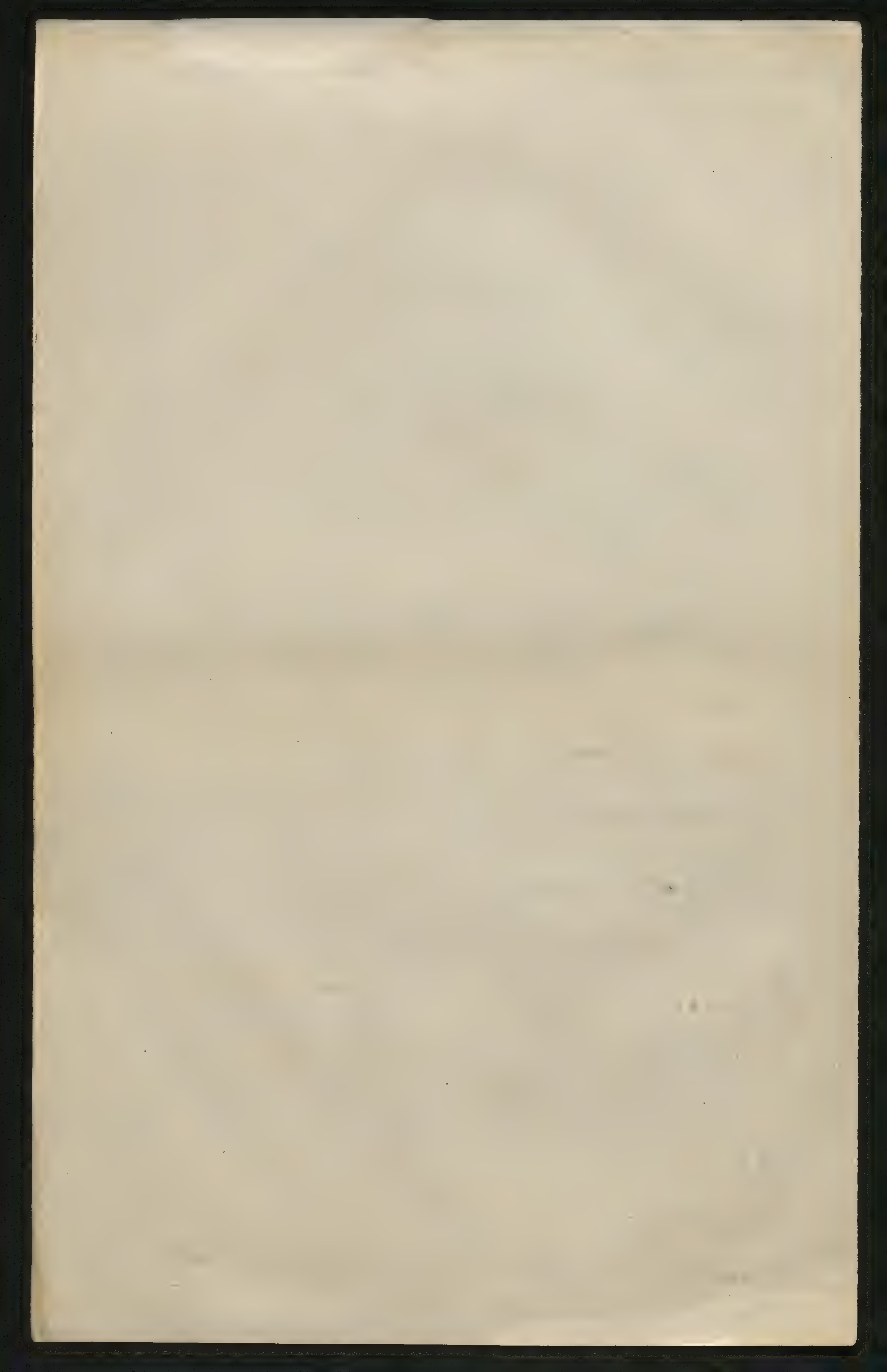
$$A + iB = e^{i\beta} + e^{2i\beta} + \dots = \frac{e^{i\beta}}{1-e^{i\beta}} = -\frac{e^{\frac{i\beta}{2}}}{e^{\frac{i\beta}{2}} - e^{-\frac{i\beta}{2}}} = \frac{i}{2}\,\frac{e^{\frac{i\beta}{2}}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{-\sin\frac{\beta}{2} + i\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$\sum \cos(\alpha - n\beta) = \frac{1}{2}\left[-\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\sum \sin(\alpha - n\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right] = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = -\frac{\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$



wiemy jak daleko wzór lim $J_{n(x)} = \frac{2\cos(\frac{\pi}{4}-x-n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2\pi x}}$

prostszy wzór jest następujący

$$\sum (y'_n)^2 = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2 k}{2\pi c t}$$

zatem ów wzór ważny tylko o ile stosunek $\frac{n}{x}$ bardzo mały ale nie gdy $\frac{n}{x}$ bliskie jedności

zatem aż do $k = \frac{\pi}{2} c t$

Istotnie jeśli $\frac{n}{x}$ małe, to równanie różniczkowe dla $J_n$ przechodzi w $J_0$, a dla ... jest tak jak

więc ów wzór ważny dopóki $\frac{k}{ct}$ małe

$$\text{to znaczy} = \frac{z}{c l t} = \frac{z}{l\cdot ct} \text{ małe} \qquad c = \sqrt{\frac{T}{ml}}$$

$$= \frac{z}{at}$$

to znaczy $z < at$

$\sqrt{\frac{k}{\rho q}} = \frac{ml}{\frac{m}{l^3}} l^2 = \frac{l}{l}$

przyjmując tym w takiej samej by było $a = \sqrt{\frac{T}{\frac{m}{l}}} = lc$

więc $2ct = \frac{2at}{l}$

Oprócz podczas drgania punktu k wykonana przez niego na punkt k+1:

$$\int \frac{dy_k}{dt}\cdot\frac{y_{k+1}-y_k}{l}\, T\, dt = \frac{T}{l}$$

---

Z przejściem do ciągłości gdy poszczególne się starają więc $at = x$ = skończone

$k = \frac{x}{l}$ $\quad$ lim $l = 0$

więc $y_k = \alpha J_{\frac{2x}{l}}\left(\frac{2x}{l}\right) = \alpha J_{\frac{2x}{l}}\left(\frac{2at}{l}\right)$

$$= \frac{1}{3\pi}\sqrt[3]{6}\sin\frac{\pi}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\left(\frac{2at}{l}\right)^{1/3}} \;?$$

ale może to nie prawda. Tylko cała fala się rozchodzi tak, ale nie ruch pojedynczego punktu?

---

Dwuwymiarowy przykład:

$$\frac{d^2 y_{kh}}{dt^2} = c^2(y_{k,h-1} - 2y_{k,h} + y_{k,h+1}) + c^2(y_{k-1,h} - 2y_{k,h} + y_{k+1,h})$$

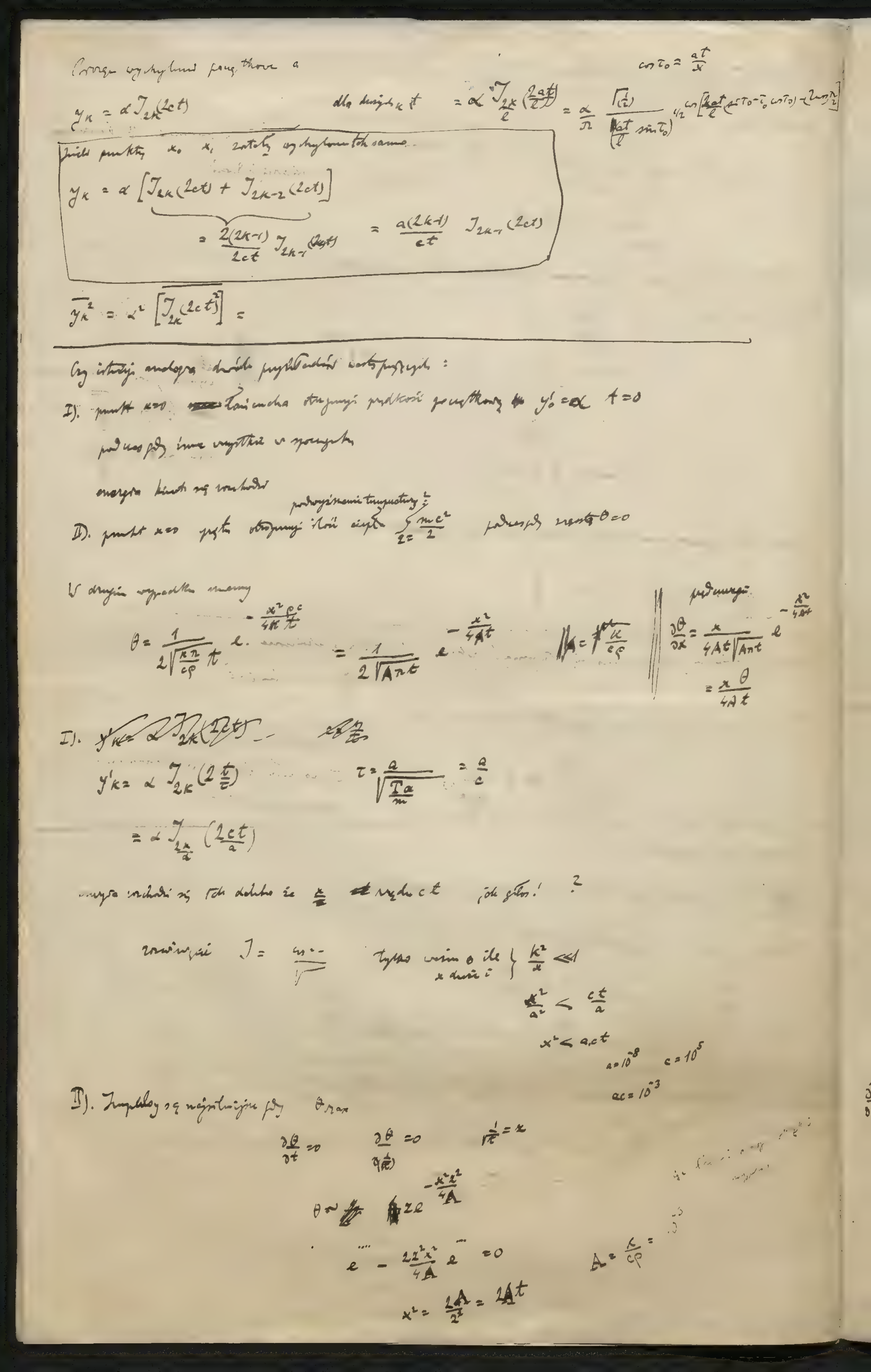
biorąc $y_{kh} = J_{2k}(2ct)\, J_{2h}(2ct)$

$$\frac{d}{dt} = J'_{2k} J_{2h} + J_{2k} J'_{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(J_{2k-1} - J_{2k+1}) J_{2h} + J_{2k}(J_{2h-1} - J_{2h+1})\right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[(J'_{2k-1} - J'_{2k+1}) J_{2h} + (J_{2k-1} - J_{2k+1}) J'_{2h} + J' \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(J_{2k-2} - 2J_{2k} + J_{2k+2}) J_{2h} + 2(J_{2k-1} - J_{2k+1})(J_{2h-1} - J_{2h+1}) + (J_{2h-2} - 2J_{2h} + J_{2h+2}) J_{2k}\right]$$



Ciągłe wychylenie początkowe $a$ $\qquad \cos\tau_0 = \frac{at}{x}$

$y_k = \alpha J_{2k}(2ct)$ $\qquad$ dla dużych $k$ $t$ $\quad = \alpha J_{\frac{2k}{l}}\left(\frac{2at}{l}\right) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{kat}{l}\sin\tau_0\right)^{1/2}} \cos\left[\frac{kat}{l}(\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0) - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$

Jeśli punkty $x_0$ $x_1$ zostały wychylone tak samo

$$y_k = \alpha\left[J_{2k}(2ct) + J_{2k-2}(2ct)\right]$$

$$= \frac{2(2k-1)}{2ct} J_{2k-1}(2ct) = \frac{\alpha(2k-1)}{ct} J_{2k-1}(2ct)$$

$$\overline{y_k^2} = \alpha^2 \left[\overline{J_{2k}(2ct)^2}\right] =$$

---

Czy istnieje analogia do dwóch przypadków wartości przyjętych:

I). punkt $x=0$ otrzymuje skończoną prędkość początkową $y_0' = \alpha$ $t=0$

podczas gdy inne wszystkie w spoczynku

energia kinet. się rozchodzi

II). punkt $x=0$ ciepła otrzymuje ilość ciepła $\sum_{z=} \frac{mc^2}{2}$ (podwojonemu temperatury?) podczas gdy reszta $\theta = 0$

W drugim wypadku mamy

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\frac{k\pi}{c\rho}t}} e^{-\frac{x^2 \rho c}{4k t}} = \frac{1}{2\sqrt{A\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4At}} \qquad A = \frac{k}{c\rho}$$

pochodna: $\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{x}{4At\sqrt{A\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4At}} = \frac{x\,\theta}{4At}$

I). ~~$y_k' = \alpha J_{2k}(2ct)$~~

$$y_k' = \alpha J_{2k}\left(2\frac{t}{\tau}\right) \qquad \tau = \frac{a}{\sqrt{\frac{Ta}{m}}} = \frac{a}{c}$$

$$= \alpha J_{\frac{2x}{a}}\left(\frac{2ct}{a}\right)$$

energia rozchodzi się tak dalece że $\frac{x}{a}$ względnie $ct$ jak głos! ?

rozwinięcie $J = \frac{\cos\ldots}{\sqrt{\ }}$ tylko ważne o ile $\left\{ \frac{k^2}{x} \ll 1 \right.$ (x duże)

$$\frac{x^2}{a^2} < \frac{ct}{a}$$

$$x^2 < act$$

$a = 10^{-8}$ $\quad c = 10^5$

$ac = 10^{-3}$

II). Temperatura się największa gdy $\theta_{max}$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial\theta}{\partial(\frac{1}{\sqrt{t}})} = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{t}} = z$$

$$\theta \sim z\, e^{-\frac{x^2 z^2}{4A}}$$

$$e^{\cdots} - \frac{2z^2x^2}{4A} e^{\cdots} = 0 \qquad A = \frac{k}{c\rho} =$$

$$x^2 = \frac{2A}{z^2} = 2At$$

Debye:

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m} A_n(\tau)\,\frac{\Gamma(n+\frac12)}{(\frac{x}{2}\sin\tau)^{n+\frac12}}\cos\left\{x(\sin\tau-\tau\cos\tau)-(2n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$$

$\cos\tau = \frac{p}{x}$

$A_0(\tau) = 1$

$A_1\tau = \frac{1}{8} + \frac{5}{24}\operatorname{ctg}^2\tau$

$A_2\tau = \frac{3}{128} + \frac{3}{576}\operatorname{ctg}^2\tau + \ldots\operatorname{ctg}^4\tau$

$\frac{p}{x} = \text{male} = \varepsilon$

lub Nicholson:

$\tau = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad \cos\tau = \sin\varphi = \frac{p}{x}$

$\sin\tau = \sqrt{1-(\frac{p}{x})^2} \neq 1 - \frac{p^2}{2x^2}$

$\operatorname{ctg}\tau = \frac{p}{x} + \frac{p^3}{2x^3}$

$\sin\tau - \tau\cos\tau = 1 - \frac{p^2}{2x^2} - (\frac{\pi}{2}-\varphi)\frac{p}{x}$

Gdy tak: $p = x\sin\varphi$

$\sin\tau = \cos\varphi$

$= \cos\varphi - (\frac{\pi}{2}-\varphi)\sin\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} - (\frac{\pi}{2}-\varphi)(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!}) + \frac{\varphi^4}{4!}$

$= 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!}$

$- \frac{\pi}{2}\varphi + \varphi^2 + \frac{\pi}{2}\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^4}{3!}$

$= 1 - \frac{\pi\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{2}$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\Gamma(\frac12)}{\left[\frac{x}{2}(1-\frac{\varphi^2}{2})\right]^{1/2}}\cos\left[x\left(1-\frac{\pi\varphi}{2}+\frac{\varphi^2}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Gamma(\frac32)}{\left[\frac{x}{2}(1-\frac{\varphi^2}{2})\right]^{3/2}}\cos\left[x(\ldots)-\frac{3\pi}{4}\right] \ldots\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(\frac12)}{\sqrt{\frac{x}{2}}}\cos\left(x - \frac{\pi p}{2}\right)$$

Nicholson (n integr)

$$J_n^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2nx\; J_0(2z\sin x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_{2n}(2z\sin\theta)\,d\theta$$

$$\int [J_n(z)]^2\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int J_{2n}(2z\sin\theta)\,dz$$

$$\int J_m(x)\,dx = \int J_{m+2}(x)\,dx + 2J_{m+1}(x)$$

$2J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$

$2J_{\nu+2}' = J_{\nu+1} - J_{\nu+3}$

$2(J_\nu' - J_{\nu+2}') = J_{\nu-1} - 2J_{\nu+1} + J_{\nu+3}$, where $2(J_\nu' - J_{\nu+2}') = 4J_{\nu+1}''$

$4J_{\nu+2}'' = J_\nu - 2J_{\nu+2} + J_{\nu+4}$

$4J_{\nu-2}'' = J_{\nu-4} - 2J_{\nu-2} + J_\nu$

$4J_\nu'' = J_{\nu-2} - 2J_\nu + J_{\nu+2}$

$4[J_{\nu+2}'' + J_{\nu-2}'' + 2J_\nu''] = J_{\nu+4} + J_{\nu-4} - 2J_\nu$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \left|\,2\frac{1}{a^2 t}\int\left[y_{k+2}'^2 - 2y_{k+1}'^2 + y_k'^2\right]dt\right.$$

$$= \frac{1}{2a^2 t}\int\left\{\left[J_{2k+2}(2ct)\right]^2 - 2\left[J_{2k+2}(2ct)\right]^2 + [\ldots]\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2a^2 4t\,\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_{t_1}^{t_2}\left[J_{4k+8} - 2J_{4k+4} + J_{4k}(4ct\sin\theta)\right]dt$$

where $J_{4k+8} - 2J_{4k+4} + J_{4k} = J_{4k+6}'' + 2J_{4k+4}'' + J_{4k+2}''$

$$\int\frac{d\theta}{4c\sin\theta}\left[J_{4k+6}' + 2J_{4k+4}' + J_{4k+2}'\right]$$

Drugie zaś

$$y_{kh} = J_{2k} + J_{2h}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{c^2}{4}\left[J_{2k-2} - 2J_{2k} + J_{2k+2} + J_{2h-2} - 2J_{2h} + J_{2h+2}\right]$$

$$y_{k,h-1} - 2y_{kh} + y_{k,h+1} = J_{2k} + J_{2h-2} - 2J_{2k} - 2J_{2h} + J_{2k} + J_{2h+2}$$

stimmt !

a podobnie w trzywymiarowym przykładzie!

w razie $k = h = j = 2$ mamy zatem

$$y_2' = 3aJ_{2r}(2ct)$$

---

$y'_k = J_{2k}(2ct)$

$$\frac{\partial\bar\theta}{\partial k^2} = \frac{1}{2a^2 t_1}\int\left[y'^2_{k+1} - 2y'^2_k + y'^2_{k-1}\right]dt = \frac{1}{2a^2 t}\int\left[J^2_{2k+2} - 2J^2_{2k} + J^2_{2k-2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2a^2\pi(t_1-t_2)}\int_0^\pi d\theta\int\underbrace{\left(J_{4k+4} - 2J_{4k} + J_{4k-4}\right)}_{4\left(J''_{4k+2}+2J''_{4k}+J''_{4k-2}\right)}dt$$

$$\int J''(4ct\sin\theta)\,dt = \frac{J'(4ct\sin\theta)}{4c\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{8a^2\pi c(t_1-t_2)}\int\frac{d\theta}{\sin\theta}\underbrace{\left(J'_{4k+2} + 2J'_{4k} + J'_{4k-2}\right)}\Big|$$

$$2J'_{n+2} = J_{n+1} - J_{n+3} = \frac{x}{2\nu}(J_n - J_{n+4})$$

$$4J'_n = 2(J_{n-1} - J_{n+1}) = \frac{2x}{2\nu}(J_{n-2} - J_{n+2})$$

$$2J'_{n-2} = J_{n-3} - J_{n-1} = \frac{x}{2\nu}(J_{n-4} - J_n)$$

$$2(J'_{n+2} + 2J'_n + J'_{n-2}) =$$

$$= J$$

$$\frac{\partial\bar\theta}{\partial t} = \int\frac{\partial}{\partial t}(y'^2)\,dt = \frac{y'^2}{t_1-t_2}\Big| = \underline{J^2_{2k}(2ct)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{J_{4k}(4ct\sin\theta)\,d\theta}{t_1-t_2}$$

$$2\left[J'_{n+2} + 2J'_n + J'_{n-2}\right] = \underbrace{J_{n-3} + J_{n-1}}_{\frac{2(n-2)}{x}J_{n-2}} - \underbrace{J_{n+1} - J_{n+3}}_{\frac{2(n+2)}{x}J_{n+2}} = 2\frac{n}{x}(J_{n-2} - J_{n+2}) - \frac{4}{x}(J_{n-2} + J_{n+2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_{k+1} + E_{k-1}) = \frac{1}{\pi(t_1-t_2)}$$

---

$$\frac{\Delta\theta_k}{\Delta k^2} = \frac{1}{2a^2\pi}\int_0^\pi d\theta\left[J_{4k+4} - 2J_{4k} + J_{4k-4}(4ct\sin\theta)\right]$$

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi d\theta\, J_{4k}(4ct\sin\theta)$$

$$= \frac{4c}{\pi}\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\,J'_{4k}(4ct\sin\theta)$$

$$= \frac{2c}{\pi}\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\left[J_{4k-1} - J_{4k+1}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}:\quad \frac{2\nu}{x}J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$$

$$\left[\frac{2\nu}{x}J'_\nu - \frac{2\nu}{x^2}J_\nu = J'_{\nu-1} + J'_{\nu+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[J_{\nu-2} - \cancel{J_\nu} - J_{\nu+2}\right]$$

$$\frac{2(4k-1)}{x}J_{4k-1} = J_{4k-2} + J_{4k}$$

$$\frac{2(4k+1)}{x}J_{4k+1} = J_{4k} + J_{4k+2}$$

| + | - |
|---|---|
| 3 | 5 |
| 7 | 9 |

~~(4k-3) 2 (4k+3)~~

$(4k-1) - (4k+1) + (4k+3) - (4k+5) + (4k+7) - (4k+9)$

~~4k+2~~

$$J_{\nu-1} = J'_\nu + \frac{\nu}{x} J_\nu$$

$$J_\nu = J'_{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x} J_{\nu+1}$$

$$J_{\nu+1} = \frac{\nu}{x} J_\nu - J'_\nu$$

$$= \frac{\nu}{x}\left(\frac{\nu-1}{x} J_{\nu-1} - J'_{\nu-1}\right) -$$

$$\sum_0^\lambda (-1)^\lambda J_{2\lambda+1} = \frac{1}{\pi} \sum (-1)^\lambda \int_0^\pi \cos[x \sin\omega - (2\lambda+1)\omega]\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \cos(x \sin\omega) \cos(2\lambda+1)\omega + \sin$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \cos(x \sin\omega) \sum_0^\lambda (-1)^\lambda \cos((2\lambda+1)\omega) + \int_0^\pi \sin(x\sin\omega) \sum_0^\lambda (-1)^\lambda \sin((2\lambda+1)\omega)\, d\omega$$

$$\sum e^{i(2\lambda+1)\omega} = \sum \cos(2\lambda+1)\omega + i \sin(2\lambda+1)\omega = e^{i\omega} \cdot \sum e^{2\lambda i\omega} = e$$

$$= e^{i\omega}\left[1 + e^{2i\omega} + e^{4i\omega} + \cdots e^{2\lambda i\omega}\right] \qquad x = e^{2i\omega}$$

$$\underbrace{\left[1 + x + x^2 + \cdots x^\lambda\right]}_{S} \qquad S - Sx = 1 - x^{\lambda+1}$$

$$S = \frac{1 - x^{\lambda+1}}{1 - x}$$

$$\sum = e^{i\omega} \frac{1 - e^{2i\omega(\lambda+1)}}{1 - e^{2i\omega}} = -\frac{1 - e^{2i\omega(\lambda+1)}}{(2i)\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}} = \frac{i}{2} \frac{1 - e^{2i\omega(\lambda+1)}}{\sin\omega}$$

$$= \frac{i}{2} \frac{1 - \cos 2\omega(\lambda+1) - i \sin 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}$$

$$\sum \cos(2\lambda+1)\omega = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}$$

$$\sum \sin(2\lambda+1)\omega = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}$$

$$\Sigma = \sum_0^\lambda (-1)^\lambda J_{2\lambda+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(x\sin\omega) \sin 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x\sin\omega)\left[1 - \cos 2\omega(\lambda+1)\right]}{\sin\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \sin x \left(1 - \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{2(\lambda+1)}\Big|_0^\pi\right) + \frac{1}{2\pi} \cos x \left. \frac{\cos 2\omega(\lambda+1)}{2(\lambda+1)} \right|_0^\pi$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(x\sin\omega) \sin 2\omega(\lambda+1)\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(x\sin\omega)\left[1 - \cos 2\omega(\lambda+1)\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(x\sin\omega)\, d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos[x\sin\omega - 2\omega(\lambda+1)]\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2} J_0(x) - \frac{1}{2} J_{2\lambda+2}(x)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x\sin\omega)\, d\omega}{\sin\omega} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\sin[x\sin\omega - 2\omega(\lambda+1)]}{\sin\omega}\, d\omega$$

$J_{4k+4} + J_{4k+2}$ $\quad$ = (?)

$- J_{4k+2} - J_{4k}$

$- J_{4k} - J_{4k-2}$ $\qquad\qquad -3+5-7\cdot$

$+ J_{4k-2} + J_{4k-4}$

Wyjątek kiedy sumujemy całego rzędu od $0$ do $k$:

$$\frac{4c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum_{k=0}^{k} J'_{4k}(4ct\sin\theta) = \frac{2c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum \left[J_{4k-1} - J_{4k+1}\right] = \frac{2c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum_0^{\lambda=2k} J_{2\lambda+1}(-1)^\lambda$$

przy końcowym: $J_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$

$$J_{4k-1} = \sqrt{\frac{2}{4\pi ct\sin\theta}} \sin\left(4ct\sin\theta - \frac{8k-3}{4}\pi\right)$$

$$J_{4k+1} = \cdots \qquad - \frac{8k+1}{4}\pi) = \left[\cdots - \frac{8k-3}{4}\pi - \pi\right]$$

$$= - J_{4k-1}$$

nie pewne o ile $\frac{k^2}{x}$ mniejsze będzie? $\quad \mp \frac{4c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum J_{4k-1}$

$$= \frac{4c}{\pi} k \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{2\pi ct\sin\theta}}\, d\theta = \frac{4ck}{\pi\sqrt{2\pi ct}}\int_0^\pi \sqrt{\sin\theta}\, d\theta$$

$$\sum_0^\infty (-1)^\lambda J_{2\lambda+1}(x) = \frac{\sin x}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin\theta \sin(4ct\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos((4ct+1)\sin\theta) - \cos((4ct-1)\sin\theta)\right] d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[J_0(4ct+1) - J_0(4ct-1)\right]$$

↑ tłed pochodzi od punktu $k=0$ gdzie przejście mniej wiarygodny

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dn \int_0^\infty J_0\left(\frac{2\omega}{t}\right) \cos n(\omega - t)\, d\omega$$

$$\cos nt \int_0^\infty J_0\left(\frac{2\omega}{t}\right) \cos n\omega\, d\omega + \sin nt \int_0^\infty J_0\left(\frac{2\omega}{t}\right) \sin n\omega\, d\omega$$

---

$$J_n^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_{2n}(2x\sin\theta)\, d\theta = \frac{2x}{4n\pi}\int_0^\pi (J_{2n-1} + J_{2n+1}) \sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \quad 2 J_n J'_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\; J'_{2n}(2x\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \left(J_{2n-1} - J_{2n+1}\right)$$

$$\frac{n}{z} J_n^2(z) + J_n J'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\; J_{2n-1}$$

$$J_n\left[\frac{J_{n-1} + J_{n+1}}{2} + \frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2}\right] = J_n J_{n-1} = \uparrow$$

$$\int x^{\nu+1} J_\nu(x)\, dx = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)$$

$$\int J_\nu(x)\, dx = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} J_{\nu+2\nu+1}(x)$$

$$\frac{x}{2} = J_1 + 3J_3 + 5J_5 \cdots$$

$$1 = J_0 + 2J_2 + 2J_4$$

$$\sin x = 2J_1 - 2J_3 + 2J_5 -$$

$$\cos x = J_0 - 2J_2 + 2J_4 - \cdots$$

String loaded with particles

End A forced to vibrate $y_0 = C \sin \mu t$

" B ~~[illegible]~~ $y_0 = 0$

$y' = C\mu \cos \mu t$

$\int \frac{m y'^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m (C\mu)^2}{2} = \alpha \theta$

represents rod heated at one end to temperature $C^2\mu^2$ and the other end held at temperature 0°

Cząsteczkowe wielkości; $\frac{T}{lm} = c^2$

chodzi o to czy $\mu \gtrless 2c$

Zamiast $\frac{T}{l}$ w razie longitudinalnych [illegible] przyjmujemy $\frac{\varepsilon}{l} = El$ $\qquad c^2 = \frac{El}{m}$

$m \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{x_{k+1} - x_k}{l} \varepsilon - \dots$ $\qquad$ ~~[illegible]~~ $\varepsilon = E l^2$ $\qquad c = \sqrt{\frac{El}{m}}$

$l = 10^{-7}$ $\qquad m = \rho l^3$

~~[illegible]~~ przybliżenie $\left(\frac{C\mu}{2}\right)^2 = [50000]^2$

$\mu = \frac{50000 \sqrt{2}}{C}$

C nie może być ~~[illegible]~~ większe niż $10^{-7}$

więc $\mu > \frac{5.10^4 \sqrt{2}}{10^{-7}} = 7.10^{11}$

więc drgania wielkości tego samego rzędu

naturalnie bo to drgania były [illegible] dynamiczne ciepła!

~~$E = 1000.10^9$~~

~~$= 10^{12}$~~

$c = \sqrt{\frac{El}{\rho l^3}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$= \frac{10^5}{10^{-7}} = 10^{12}$

$2c = 2.10^{12}$

$\mu = 10^{12}$

$\tau = 6 \cdot 10^{-12}$

~~[illegible]~~

tem odpowiadałaby długość fal świetlnych

$\lambda = 18.10^{-2} = 0{,}2$ cm

Takie wzory [illegible] z postaci [illegible] do tego wynik w pierwszym rzędzie [illegible].

---

Raczej widoczniejszy inny sposób: Superponujemy wszystkie wyniki w pewnym [illegible] i w początku, tylko punkt k otrzymuje prędkość początkową a

$y_k = \sum E_i \sin 2k\theta \cos(2ct \sin\theta) + \sum F_i \sin 2k\theta \sin(2ct \sin\theta)$

$E_i = 0$

$F_i = \frac{a \sin 2k\theta}{c(n+1) \sin\theta} \longrightarrow \theta = \frac{i\pi}{2(n+1)}$

$y_k = \frac{a}{c(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{\sin \frac{2h\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{i\pi}{2(n+1)}} \sin \frac{2k i\pi}{2(n+1)} \sin\left(2ct \sin \frac{i\pi}{2(n+1)}\right)$

$\frac{i}{n+1} \frac{\pi}{2} = \varphi$

$\frac{\pi}{2(n+1)} = d\varphi$

dla $n = \infty$:

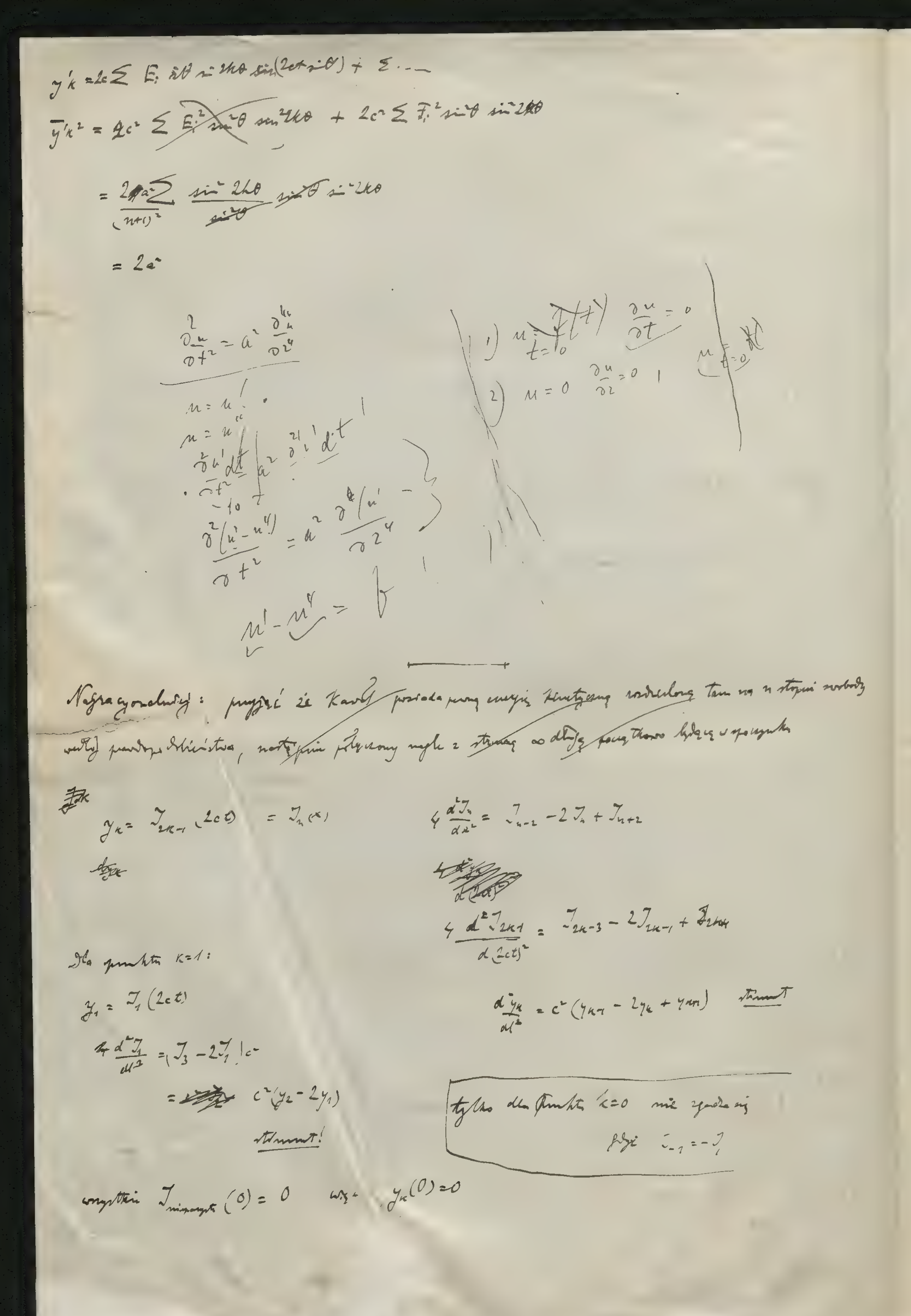
~~$y'_k = 2a \sum \sin$~~

$y'_k = \frac{4a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin 2h\varphi \sin 2k\varphi}_{-\cos 2(h+k)\varphi + \cos 2(h-k)\varphi} \cos(2ct \sin\varphi)\, d\varphi$

$J_n(x)$

$n = 2(h-k)$

$x = 2ct$



$y'_k = 2c \sum E_i \sin\theta \sin 2k\theta \sin(2ct\sin\theta) + \Sigma \ldots$

$\overline{y'_k{}^2} = 4c^2 \sum E_i^2 \sin^2\theta \sin^2 2k\theta + 2c^2 \sum F_i^2 \sin^2\theta \sin^2 2k\theta$

$= \frac{2a^2}{(n+1)^2} \sum \frac{\sin^2 2k\theta}{\sin^2\theta} \sin^2\theta \sin^2 2k\theta$

$= 2c^2$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$

1) $u_{t=0} = F(t)$ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

2) $u = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $u_{t=0} = \Phi(t)$

$u = u'$

$u = u''$

$\int_0^t \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} dt = a^2 \int \frac{\partial^4 u'}{\partial x^4} dt$

$\frac{\partial^2 (u' - u'')}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 (u' - u'')}{\partial x^4}$

$u' - u'' = 0$

Najgraczowalniej: przyjąć że kawał posiada pewną energię kinetyczną rozdzieloną tam na n stopni swobody według prawdopodobieństwa, [illegible] połączony [illegible] z struną o długości początkowo leżącej w spoczynku

Jak

$y_k = J_{2k-1}(2ct) = J_n(x)$

$4 \frac{d^2 J_n}{dx^2} = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}$

$4 \frac{d^2 J_{2k-1}}{d(2ct)^2} = J_{2k-3} - 2J_{2k-1} + J_{2k+1}$

$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = c^2 (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})$ stimmt

Dla punktu $k=1$:

$y_1 = J_1(2ct)$

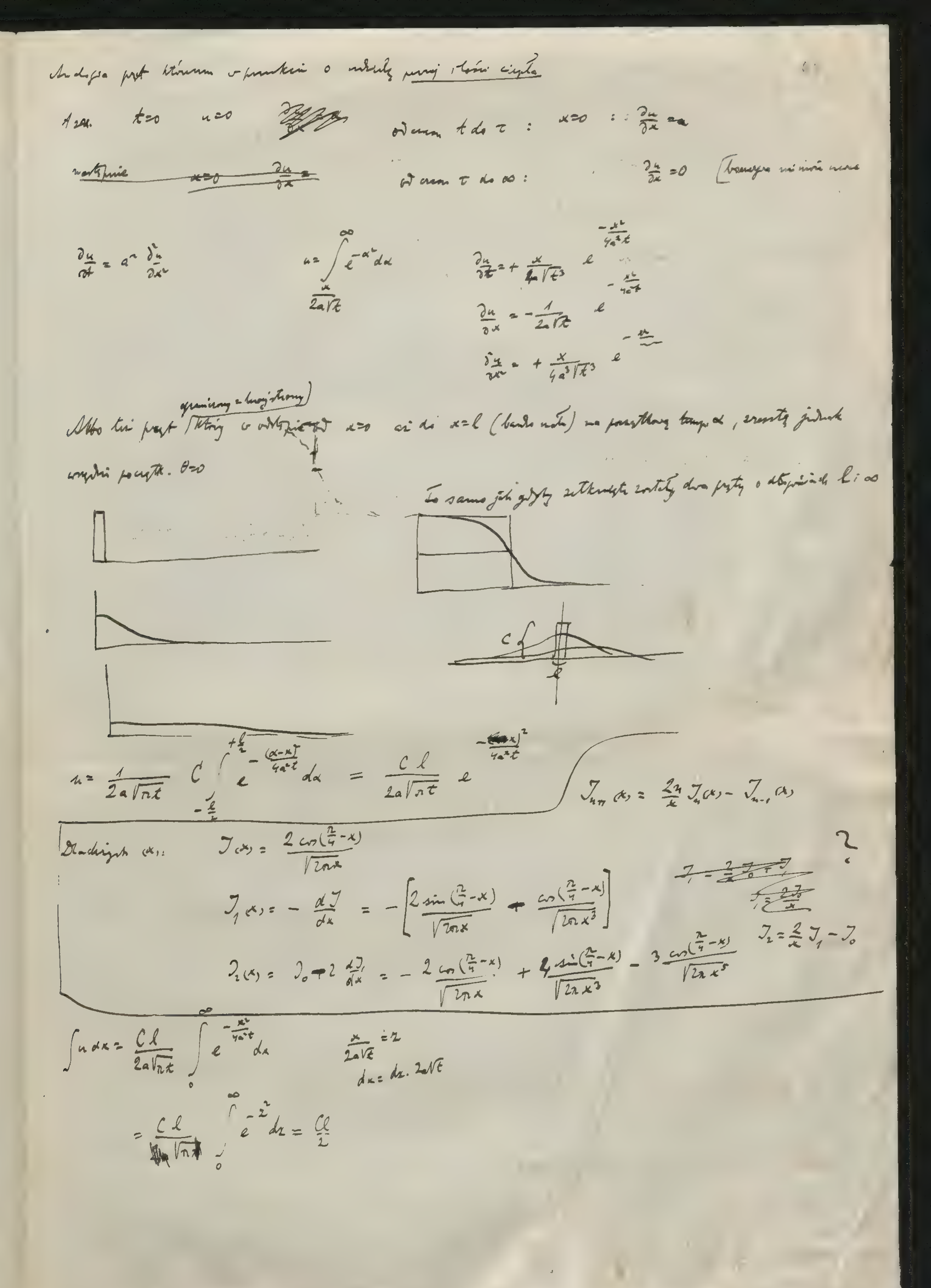
$4 \frac{d^2 J_1}{dt^2} = (J_3 - 2J_1) c^2$

$= c^2 (y_2 - 2y_1)$

stimmt!

tylko dla punktu $k=0$ nie zgadza się gdyż $J_{-1} = -J_1$

wszystkie $J_{\text{nieparzyste}}(0) = 0$ więc $y_k(0) = 0$



Analogia pręt którego w punkcie 0 udzielę pewnej ilości ciepła

Jeżeli $t=0$ $u=0$ od czasu $t$ do $\tau$ : $x=0$ : $\frac{\partial u}{\partial x} = a$

~~następnie $x=0$ $\frac{\partial u}{\partial x} =$~~ od czasu $\tau$ do $\infty$ : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ [illegible]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u = \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + \frac{x}{4a\sqrt{t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = + \frac{x}{4a^3\sqrt{t^3}} e^{-\frac{x^2}{\dots}}$$

Albo też pręt (ograniczony z obu stron) który w odstępie od $x=0$ aż do $x=l$ (bardzo małe) ma pewną temp. $\alpha$, zresztą jednak wszędzie początk. $\theta=0$

To samo jak gdyby zetknęły się dwa pręty o długościach $l$ i $\infty$

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} C \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} d\alpha = \frac{C\, l}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

Dla dużych $x$: 

$$J(x) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2\pi x}}$$

$$J_1(x) = - \frac{dJ}{dx} = - \left[ \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x}} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x^3}} \right]$$

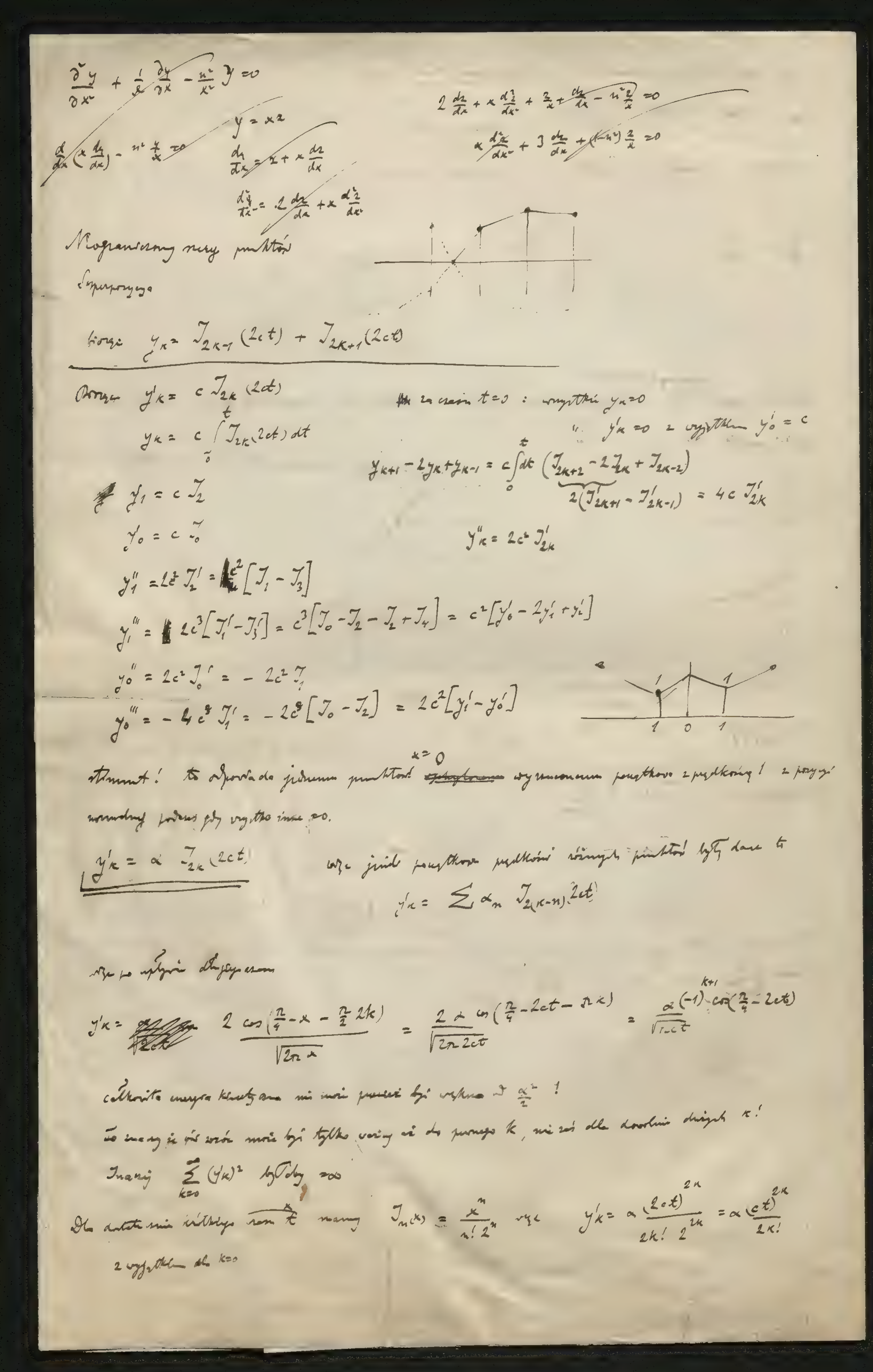
~~$J_1 = \frac{2}{x} J_0 + J_1$~~ ?

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0$$

$$J_2(x) = J_0 + 2\frac{dJ_1}{dx} = - \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x}} + \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x^3}} - \frac{3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x^5}}$$

$$\int u\, dx = \frac{C\, l}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} dx \qquad \frac{x}{2a\sqrt{t}} = z \qquad dx = dz \cdot 2a\sqrt{t}$$

$$= \frac{C\, l}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{Cl}{2}$$



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2} y = 0$$

$$2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{z}{x} + \frac{dz}{dx} - n^2\frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - n^2\frac{y}{x} = 0 \qquad y = xz$$

$$x\frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} + (1-n^2)\frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}$$

Nieograniczony szereg punktów

Superpozycja

które $y_k = J_{2k-1}(2ct) + J_{2k+1}(2ct)$

Rozwiązanie $y'_k = c\,J_{2k}(2ct)$ dla czasu $t=0$: wszystkie $y_k = 0$

$y_k = c\int_0^t J_{2k}(2ct)\,dt$ $\quad$ " $y'_k = 0$ z wyjątkiem $y'_0 = c$

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = c\int_0^t dt\,\left(J_{2k+2} - 2J_{2k} + J_{2k-2}\right), \quad J_{2k+2} - 2J_{2k} + J_{2k-2} = 2\left(J'_{2k+1} - J'_{2k-1}\right) = 4c\,J'_{2k}$$

$$y''_k = 2c^2 J'_{2k}$$

$$y_1 = c\,J_2$$

$$y_0 = c\,J_0$$

$$y''_1 = 2c^2 J'_2 = c^2\left[J_1 - J_3\right]$$

$$y'''_1 = 2c^3\left[J'_1 - J'_3\right] = c^3\left[J_0 - J_2 - J_2 + J_4\right] = c^2\left[y'_0 - 2y'_1 + y'_2\right]$$

$$y''_0 = 2c^2 J'_0 = -2c^2 J_1$$

$$y'''_0 = -4c^3 J'_1 = -2c^3\left[J_0 - J_2\right] = 2c^2\left[y'_1 - y'_0\right]$$

Ciekawe! to odpowiada jednemu punktowi $x=0$ ~~wychylonemu~~ wyrzuconemu początkowo z prędkością! z pozycji równowagi podczas gdy wszystkie inne $=0$.

$$y'_k = \alpha\,J_{2k}(2ct)$$

więc jeśli początkowe prędkości różnych punktów były dane to

$$y'_k = \sum \alpha_n\,J_{2(k-n)}(2ct)$$

więc po upływie dłuższego czasu

$$y'_k = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{2}2k\right)}{\sqrt{2\pi x}} = \frac{2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2ct - \pi k\right)}{\sqrt{2\pi\,2ct}} = \frac{\alpha(-1)^{k+1}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2ct\right)}{\sqrt{\pi ct}}$$

całkowita energia kinetyczna nie może przecież być większa od $\frac{\alpha^2}{2}$!

to znaczy że ten wzór może być tylko ważny aż do pewnego $k$, nie zaś dla dowolnie dużych $k$!

Inaczej $\sum_{k=0}^{\infty}(y'_k)^2$ byłoby $=\infty$

Dla dostatecznie krótkiego czasu $t$ mamy $J_n(x) = \frac{x^n}{n!\,2^n}$ więc $y'_k = \alpha\frac{(2ct)^{2k}}{2k!\,2^{2k}} = \alpha\frac{(ct)^{2k}}{2k!}$

z wyjątkiem dla $k=0$

$$e^{i\omega} - e^{3i\omega} + e^{5i\omega} - e^{7i\omega} \cdots (-1)^\lambda e^{(2\lambda+1)i\omega} = e^{i\omega}\underbrace{\left[1 + x + x^2 \sim \quad x^\lambda\right]}_{= e^{i\omega}\frac{1-(-e^{2i\omega})^{\lambda+1}}{1+e^{2i\omega}}} \qquad x = -e^{2i\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1 + (-1)^\lambda e^{2i\omega(\lambda+1)}}{\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1 + (-1)^\lambda \cos 2\omega(\lambda+1) + (-1)^\lambda i \sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}$$

$$\sum (-1)^\lambda \cos(2\lambda+1)\omega = \frac{1}{2}\,\frac{1+(-1)^\lambda \cos 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}$$

$$\sum (-1)^\lambda \sin(2\lambda+1)\omega = \frac{1}{2}(-1)^\lambda \frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}$$

$\omega = \frac{\pi}{2}-\varphi$

$\sin(2\lambda+1)(\frac{\pi}{2}-\varphi) =$

$\sum \sin(2\lambda+1)\varphi$

$\sin(2\pi - 2\varphi)(\lambda+1) = -\sin 2\varphi(\lambda+1)$

$$S = \sum_0^\lambda (-1)^\lambda J_{2\lambda+1} = \frac{1}{2\pi}\int \cos(x\sin\omega)\,\frac{1+(-1)^\lambda\cos 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega + \sin(x\sin\omega)\,\frac{(-1)^\lambda \sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos(x\sin\omega)}{\cos\omega}\,d\omega}_{=0} + (-1)^\lambda \int \frac{\cos(x\sin\omega - 2\omega(\lambda+1))}{\cos\omega}\,d\omega$$

$$\int \cos(x\sin\omega)\,\frac{\cos 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega + \int \sin(x\sin\omega)\,\frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega$$

$$\int_0^\pi \cos(x\sin\omega)\left[\cos\omega - \cos 3\omega + \cos 5\omega - \cdots \cos(2\lambda+1)\omega\right]d\omega + \Big\} = 0$$

$$S = \frac{+1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\omega)\left[\sin\omega - \sin 3\omega + \sin 5\omega \cdot \text{———} \sin(2\lambda+1)\omega\right]d\omega = \frac{(-1)^\lambda}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\omega)\,\frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega$$

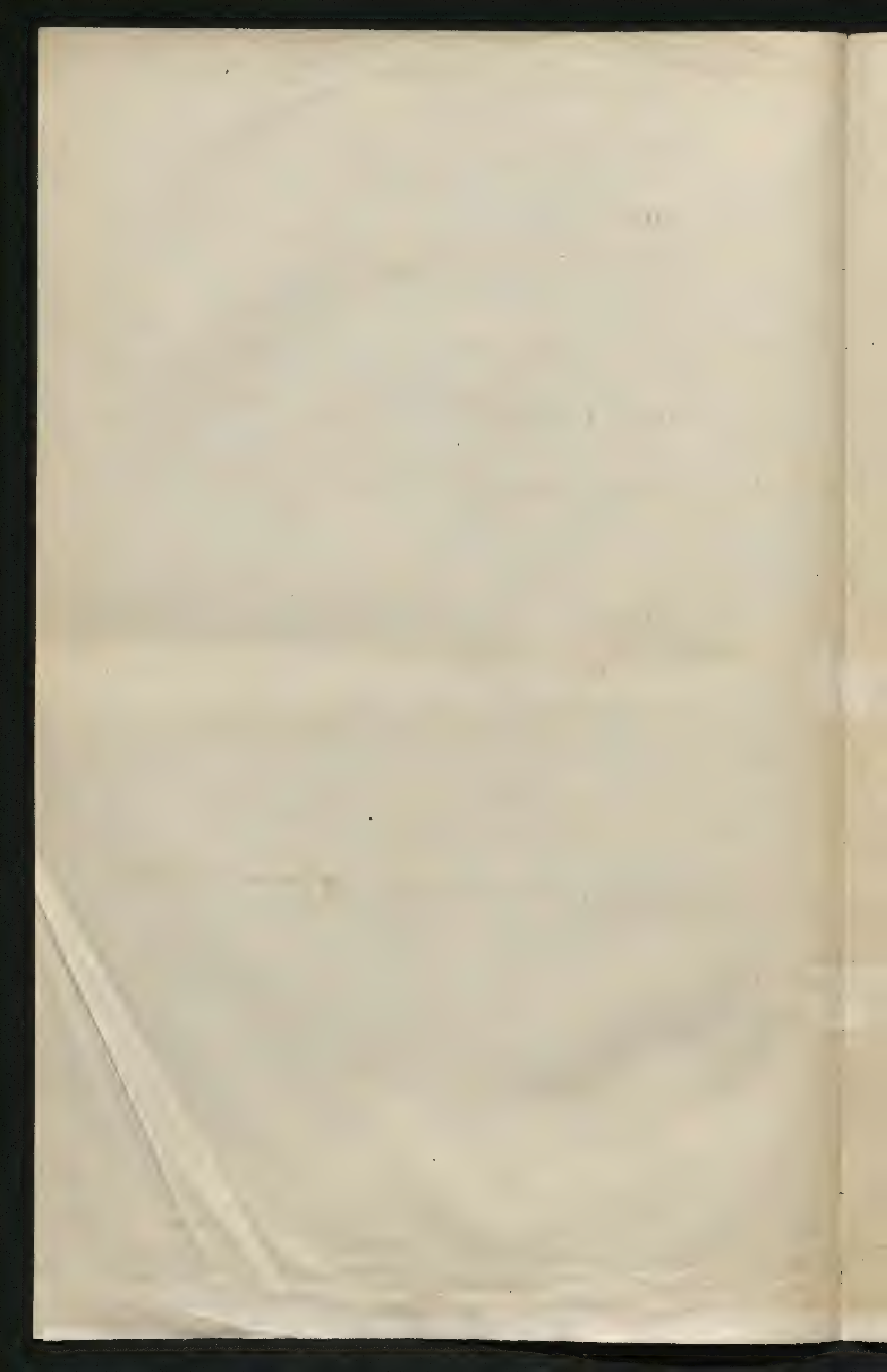
$\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi$

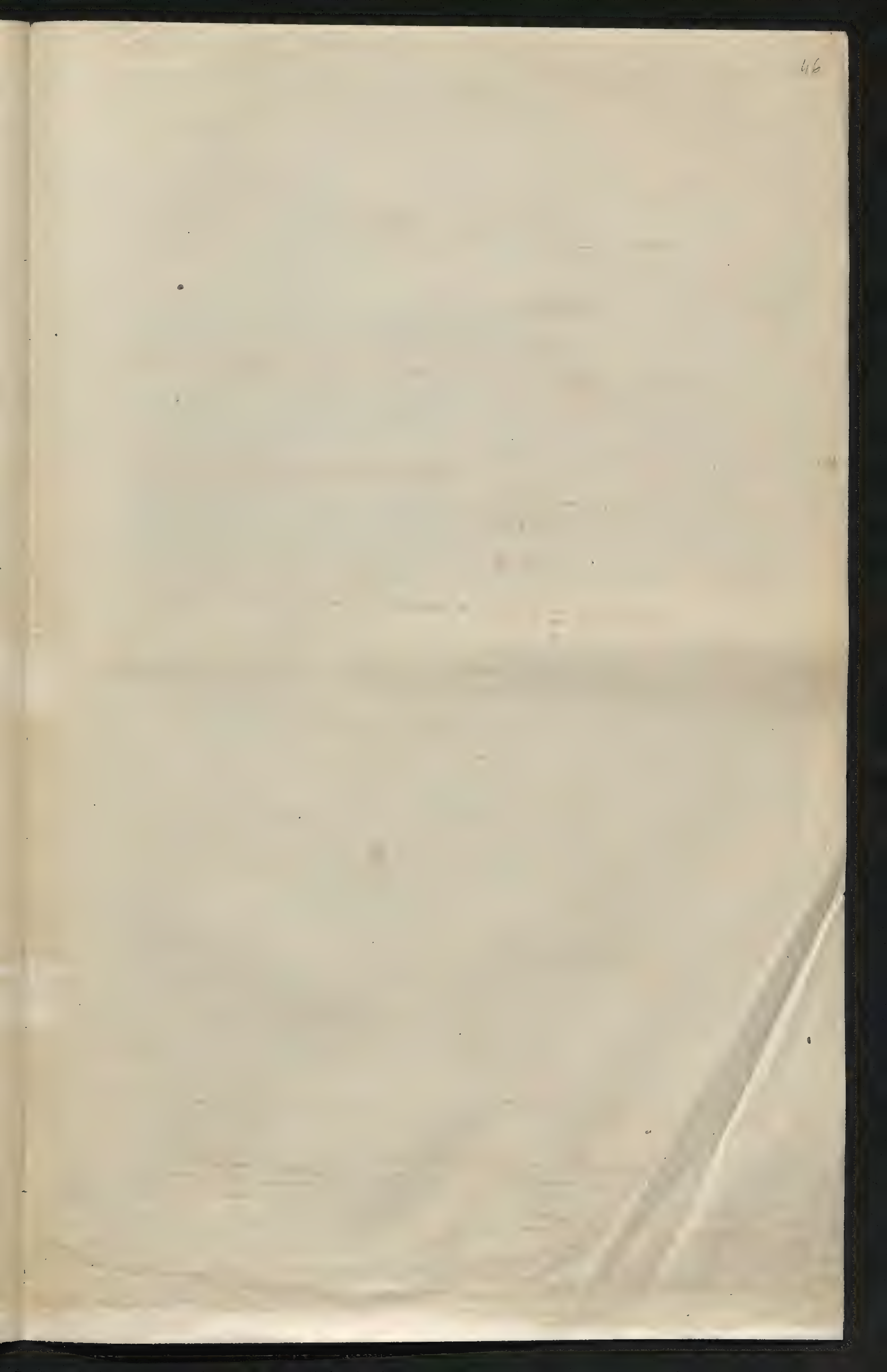
$\sin 3\omega = \sin(3\frac{\pi}{2} - 3\varphi) = -\cos 3\varphi$

$\sin 5\omega = \sin(5\frac{\pi}{2} - 5\varphi) = \cos 5\varphi$

$\cdots\cdots$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\left[\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cdots \cos\cdots\right]d\varphi$$





Całka energii kwant energii od $-k$ do $k$:

$$E = \sum_{-k}^{k} \left[J_n(z)\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \sum$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \sum_{-k}^{k} J_{4k}(4ct\cos\theta)$$

biorąc $k=\infty$ mamy: $\sum_{-\infty}^{\infty} J_{4k} = \frac{1+\cos z}{2}$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[1+\cos(4ct\cos\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} J_0(4ct)$$

więc z czasem będzie płynęła energia powstawać oddzielnej [struny]

$1+\cos z = 2J_0 + 4J_4 + \dots$

$1+\cos z = 2J_0 + 4J_{-4} + \dots$

$= 2(J_{-4} + J_0 + J_4) - 1 -$

$$J_0 - 2J_2 + 2J_4 - 2J_6 \dots \infty = \cos z$$

$$J_0 + 2J_2 + 2J_4 + 2J_6 \dots \infty = 1$$

$z = 4ct\cos\theta$

ale jakie wartości tych energii dla skończonych $k$ ?

$$E = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \sum_{-k}^{+k} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\omega - 4k\omega)\, d\omega$$

$$\int\left\{\cos(x\sin\omega)\sum_{-k}^{+k}\cos 4k\omega + \sin(x\sin\omega)\sum_{-k}^{+k}\sin 4k\omega\right\} d\omega$$

$$e^{-4ki\omega} + \dots + e^{-4i\omega} + 1 + e^{4i\omega} + \dots + e^{+4ki\omega} = e^{-4ki\omega}\left[1 + e^{4i\omega} + \dots + e^{8ki\omega}\right]$$

$$= e^{-4ki\omega}\,\frac{1-\left(e^{4i\omega}\right)^{k+1}}{1-e^{4i\omega}}$$

$$= \frac{e^{-4ki\omega} - e^{4i\omega}}{1-e^{4i\omega}} = \frac{-e^{-4ki\omega-2i\omega} + e^{2i\omega}}{\frac{e^{2i\omega}-e^{-2i\omega}}{2i}} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{i}{2}\,\frac{e^{-4ki\omega-2i\omega} - e^{2i\omega}}{\sin 2\omega}$$

$$= 1 + \frac{e^{-4ki\omega} - 1}{1-e^{4i\omega}} = 1 - \frac{1-e^{-4ki\omega}}{1-e^{4i\omega}}$$

$$= 1 + \frac{e^{-2ki\omega}}{e^{2i\omega}}\,\frac{e^{2ki\omega} - e^{-2ki\omega}}{e^{2i\omega} - e^{-2i\omega}} = 1 + e^{-2(k+1)i\omega}\,\frac{\sin 2k\omega}{\sin 2\omega}$$

$$\sum_{-k}^{+k}\cos 4k\omega = 1 + \frac{\sin 2k\omega}{\sin 2\omega}\cos 2(k+1)\omega = \frac{\sin 2\omega + \sin 2k\omega\left[\cos 2k\omega\cos 2\omega - \sin 2k\omega\sin 2\omega\right]}{\sin 2\omega}$$

$$= \frac{\sin 2\omega\cos^2 2k\omega + \cos 2\omega\sin 2k\omega\cos 2k\omega}{\sin 2\omega} = \frac{\cos 2k\omega\,\sin 2(k+1)\omega}{\sin 2\omega}$$

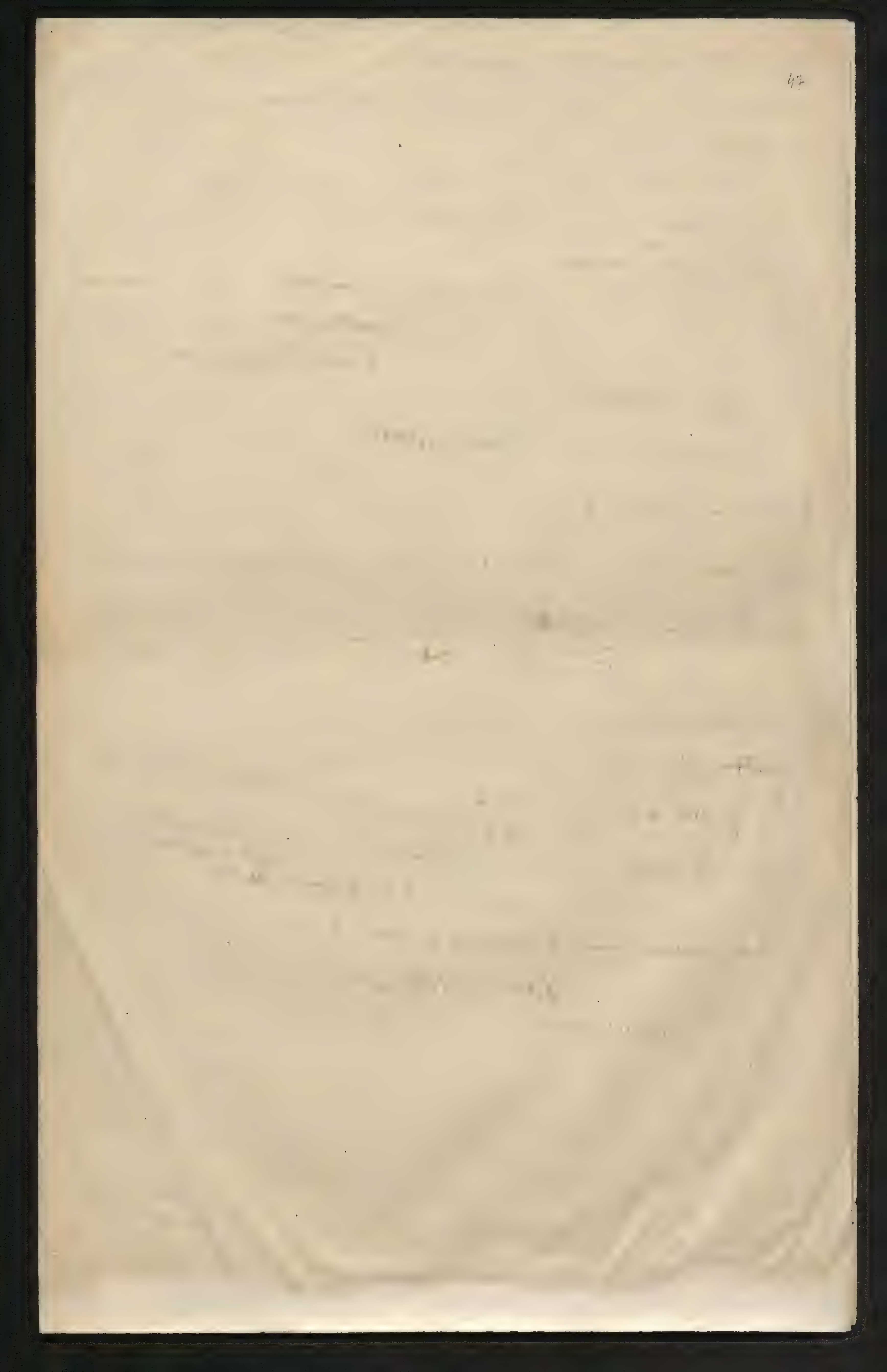
$\cos 2k\omega$

$$\sum \sin 4k\omega = -\frac{\sin 2k\omega\,\sin 2(k+1)\omega}{\sin 2\omega}$$

$$E = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\omega\,\frac{\sin 2(k+1)\omega}{\sin 2\omega}\cos(x\sin\omega + 2k\omega)$$

$\cos(x\sin\omega)\left[\cos^2 2k\omega + \sin 2k\omega\cos 2k\omega\,\mathrm{ctg}\,2\omega\right]$

$-\sin(x\sin\omega)\left[\cos 2k\omega\sin 2k\omega + \sin^2 2k\omega\,\mathrm{ctg}\,2\omega\right]$



Jeśli początkowo wszystkie prędkości i wychylenia $= 0$

a od chwili $t = 0$ początkowy punkt 0 zaczyna wykonywać drgania wymuszone $y_0' = A \sin \alpha t$

Superpozycja:

za czas $t_0$ chwilowe prędkości $y_k' = \varphi(k, t_0)$ i wychylenia $y_k = \psi(k, t_0)$

zmieniamy jednak

po upływie czasu $t_1 - t_0$

prędkość punktu 0 tak jakby był $y_0' = A \cos \alpha t_0$

$y_0' = A \sin \alpha t_1$ przez dodanie rozwiązania takiego przy

wszystkie prędkości i wychylenia $= 0$ tylko punkt

0 prędkość $A \cos \alpha t_0 \, \Delta t$

$$y'_{(k)} = \varphi(k, t) + J$$

$$\varphi(k, t + dt) = \varphi(k, t) + A \cos \alpha t \; J_k(2c\,dt)$$

Rozkładamy ruch punktu 0 na

Jeśli początkowo wszystko $= 0$ a od chwili $t = 0$ początkowy punkt 0 zaczyna poruszać się jednostajnie!

$$\dot y_k = \sum J_{2k}(2ct) + \left[1 - J_0(2c\tau)\right] J_{2k}(2c(t - \tau)) + \left[1 - J_0(4c\tau) \pm J_0(2c\tau)\left[1 - J_0(2c\tau)\right]\right] J_{2k}\, 2c(t - 2\tau)$$

Zmiana czasowa ruchu punktu $y_k$

początkowo $\frac{d}{dt} y_k = J$

$$\dot y_k(t + \tau) = \dot y_k(t) + \tau\, \ddot y_k(t) +$$

$\dot y_0 = f(t)$ Aż do chwili 0 ruch punktu 0 był $\dot y_0 = f(t)$ został puszczony wolno

Gdyby nie było wymuszenia następujący ruch: $\dot y_k = \varphi(k, t)$ $\quad \dot y_0 = f(t) = \varphi(0, t)$

$\dot y_0(\tau) = \varphi(0, t + \tau)$

i zmiana w czasie $\tau$: $\dot y_k(t + \tau) = \varphi(k, t + \tau)$

ale dla uwzględnienia wymuszenia nakładamy ponadto ruch jeszcze

$$\left[f(t + \tau) - \varphi(0, t + \tau)\right] J_{2k}(2c\tau)$$

$$\varphi(k, t + \tau) = \varphi(k, t) + \uparrow$$

$\ddot{y}_k = \frac{c^2}{a^2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$

$y_k = A \sin(\alpha t - \beta k)$ $\qquad A[\sin(\alpha t - \beta k - \beta) + \sin(\alpha t - \beta k + \beta)]$

$\ddot{y}_k = -\alpha^2 A \sin(\alpha t - \beta k)$ $\qquad 2\sin(\alpha t - \beta k)\cos\beta - 2\sin(\alpha t - \beta k)$

$= -4\sin(\alpha t - \beta k)\sin^2\frac{\beta}{2}$

$\alpha^2 = 4c^2\sin^2\frac{\beta}{2}$

$\alpha = 2c\sin\frac{\beta}{2}$ $\qquad \alpha t - \frac{\beta}{a}\widehat{ka}$

$\alpha\, dt - \frac{\beta}{a}dx = 0$

możliwe zatem tylko o ile $\qquad V = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha a}{\beta} = \frac{ac\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}$

$\frac{\alpha}{2c} < 1$

$\alpha < 2c$ $\qquad \frac{\pi}{\tau} < c$ $\qquad$ dla $\tau = \frac{\pi}{c}$ : $\longrightarrow$ $\beta = \pi$, $V = 0$

$= \frac{2\pi}{\tau}$

$\tau > \frac{\pi}{c}$

Swobodne drgania jednego punktu wobec dwóch sąsiednich ustalonych

$\ddot{y}_k = -2c^2 y_k$

$y = A\sin\alpha t$

$\alpha^2 = 2c^2$ $\qquad \alpha = c\sqrt{2} = \frac{2\pi}{\tau}$

$\tau = \frac{\pi\sqrt{2}}{c}$

N.p. jeżeli punkt 0 zmuszony zostaje do wykonania drgania $y_0 = A\sin\alpha t$

Punkt 0 zmuszony do wykonania $y_0 = A e^{\alpha t}$

Ogólniej: $\qquad y_k = A\{\sin\alpha t\ (\cos\alpha t)\}\, f(k)$

$y_k = A e^{i\alpha t}\varphi(k) + B e^{-i\alpha t}\psi(k)$ $\qquad A e^{\alpha t}\varphi_k + B e^{-\alpha t}\psi(k)$

$\ddot{y}_k = -\alpha^2 y_k$

$c^2 y_{k+1} - (2c^2 - \alpha^2) y_k + c^2 y_{k-1} = 0$

$\varphi_{k+1} - (2 - \frac{\alpha^2}{c^2})\varphi_k + \varphi_{k-1} = 0$ $\qquad \varphi_{k+1} - (2 + \frac{\alpha^2}{c^2})\varphi_k + \varphi_{k-1} = 0$

$\varphi_k = \sin\beta k$ $\qquad$ ~~$\varphi_k = \sin\beta k$, $\cos\beta = 1 + \frac{\alpha^2}{2c^2}$~~ $\qquad \varphi_k = e^{\beta k}$

$2\sin\beta k\cos\beta - (2 - \frac{\alpha^2}{c^2})\sin\beta k = 0$

$\cos\beta = 1 - \frac{\alpha^2}{2c^2}$ $\quad$ o ile $\alpha < 2c$ $\qquad \frac{e^{2\beta} + 2 + e^{-2\beta}}{4} = 1 - \frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}$

albo odwrotnie

$\varphi_k = e^{\pm\beta k}$ $\qquad \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}}$

$e^{\beta} - (2 - \frac{\alpha^2}{c^2}) + e^{-\beta} = 0$ $\qquad e^{\pm\beta} = 1 - \frac{\alpha^2}{2c^2} + \sqrt{-\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}}$ $\qquad e^{\beta} = 1 + \frac{\alpha^2}{2c^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}}$

$\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2c^2}$ $\qquad$ o ile $\frac{\alpha^2}{4c^2} > 1$ $\quad \alpha > 2c$

~~...~~ Łańcuch ograniczony długości $\overset{N=}{2m}$ punktów w środku puszczony

$$j_k = J_{2k}(2ct) - J_{2(2m-k)}(2ct) - J_{2(2m+k)} + J_{2(4m-k)} + J_{2(4m+k)} -$$

$$= \begin{cases} J_{2k} - J_{2(N-k)} + J_{2(2N-k)} - J_{2(3N-k)} + \dots \\ \quad - J_{2(N+k)} + J_{2(2N+k)} - J \dots - \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \int \cos[x \sin\omega - 2(mN+k)\omega]\, d\omega + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \int \cos[x \sin\omega) - 2(mN-k)\omega]\, d\omega$$

$$\int \cos(x\sin\omega)\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \cos 2(mN+k)\omega + \sum_{1}^{\infty} \cos 2(mN-k)\omega\right] + \sin(x\sin\omega)\sum \sin \dots$$

$$= \int \cos(x\sin\omega)\left[\cos 2k\omega + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \cos 2(mN-k)\omega\right] +$$

$$-e^{2i\omega(N-k)} + e^{2i\omega(2N-k)} - e^{2i\omega(3N-k)} + \dots =$$

$$+e^{-2i\omega k}\left[(e^{2i\omega})^N + (e^{2i\omega})^{2N} - (e^{2i\omega})^{3N} + \dots\right.$$

$$-x + x^2 - x^3 \dots = \frac{-x}{1-x}$$

$$= \frac{e^{-2i\omega k} \cdot e^{2i\omega N}}{e^{2i\omega N} - 1} = \frac{e^{-2i\omega k + i\omega N}}{e^{i\omega N} - e^{-i\omega N}} = \frac{-i}{2}\,\frac{e^{i\omega(N-2k)}}{\sin\omega N}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \cos \dots = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\omega(N-2k))}{\sin\omega N} \qquad \sum \sin = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(\omega(N-2k))}{\sin\omega N}$$

$$\int\left\{\cos(x\sin\omega)\left[\cos 2k\omega + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\omega(N-2k)}{\sin\omega N}\right] - \sin(x\sin\omega)\,\frac{1}{2}\,\frac{\cos\omega(N-2k)}{\sin\omega N}\right\} d\omega$$

$$= \int \cos(x\sin\omega)\cdot\cos 2k\omega - \frac{1}{2}\int \frac{\sin[x\sin\omega - \omega(N-2k)]}{\sin\omega N}\, d\omega$$

$$V = \alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} (y_{k+1} - y_k)^2 \qquad T = \frac{m}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}_k^2 \qquad c^2 = \frac{2\alpha}{m}$$

$$m\ddot{y}_0 = +2\alpha(y_1 - 2y_0 + y_{-1})$$

$$4mc^2 J_0'' = +2\alpha(\ldots) \quad \rightarrow \quad J_2 - 2J_0 + J_{-2}$$

$$-2J_1' + 2J_{-1}' = 4J_0''$$

$$mc^2 = 2\alpha$$

$$y_0(t) = y_0 J_0 + y_1 J_2 + y_2 J_4 + y_3 J_6 + \dot{y}_0 \int J_0\,dt + \dot{y}_1 \int J_2\,dt + \dot{y}_2 \int J_4\,dt$$

$$+ y_{-1} J_2 + y_{-2} J_4 + \cdots \qquad + \dot{y}_{-1} \int J_2\,dt + \dot{y}_2 \int J_4\,dt \cdots$$

$$\dot{y}_0(t) = 2c\left[y_0 J_0' + (y_1 + y_{-1}) J_2' + (y_2 + y_{-2}) J_4' \cdots\right] + \left[\dot{y}_0 J_0 + (\dot{y}_1 + \dot{y}_{-1}) J_2 + (\dot{y}_2 + \dot{y}_{-2}) J_4 + \cdots\right]$$

$$= c\left\{ \begin{matrix} y_0 J_{-1} - y_0 J_1 + y_2 J_3 - y_2 J_5 \cdots \\ + y_1 J_1 - y_1 J_3 \\ y_{-1} J_3 - y_{-1} J_1 \end{matrix} \right\} = c\left[ \begin{matrix} J_1(y_1 - y_0) + J_3(y_2 - y_1) + J_5(y_3 - y_2) + \cdots \\ + J_1(y_0 - y_{-1}) + J_3(y_{-1} - y_{-2}) + \cdots \end{matrix} \right]$$

$$y_1(t) = \left[y_1 J_0 + (y_2 + y_0) J_2 + (y_3 + y_{-1}) J_3 + \cdots\right] + \left[\dot{y}_1 \int J_0\,dt + (\dot{y}_2 + \dot{y}_0) \int J_2\,dt + \cdots\right]$$

Prawdopodobieństwo początkowego układu:

$$W(y_0\, y_1 \ldots) = A\, e^{-\gamma(V+T)} = A\, e^{-\gamma\left[\alpha\left\{ \begin{matrix} (y_0 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \cdots (y_{n-1} - y_n)^2 \\ (y_0 - y_{-1})^2 + (y_{-1} - y_{-2})^2 + \cdots \end{matrix} \right\} + \frac{m}{2}\left\{ \begin{matrix} \dot{y}_0^2 + \dot{y}_1^2 + \cdots \\ + \dot{y}_{-1}^2 + \cdots \end{matrix} \right\}\right]}$$

$$\iiint \cdots W = 1 = A \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma m}}\right)^{2n+1} \iint e^{-\gamma\alpha\left\{ \begin{matrix} (y_0 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 \cdots \\ + (y_0 - y_{-1})^2 + (y_{-1} - y_{-2})^2 \end{matrix} \right\}} dy_0\, dy_1\, dy_{-1} \cdots$$

[zaczynać całkowanie od $y_n$!] $= A\left[\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma m}}\right]^{2n+1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\gamma\alpha}}\right]^{2n} = A \sqrt{\frac{\gamma\pi^2 c^2}{\gamma m}}^{2n}$

$$= \ldots \left(\frac{\pi c}{\gamma m}\right)$$

$$c^2 = \frac{2\alpha}{m} \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{mc^2} \qquad \alpha = \frac{mc^2}{2}$$

$$\frac{m}{2}\overline{\dot{y}_0^2(t)} = \frac{m}{2} \iiint W \left\{4c^2\left[y_0 J_0' + \cdots\right]^2 + \left[\dot{y}_0^2 J_0^2 + \dot{y}_1^2 J_2^2 + \dot{y}_{-1}^2 J_2^2 + \cdots\right]\right\}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\frac{1}{\gamma m}\left[J_0^2 + 2J_2^2 + J_4^2 + \cdots\right] + 4c^2 \iint W\left[y_0^2 J_0'^2 + 2y_0 y_1 J_0' J_2' + y_0 y_2 J_0' J_4' + \cdots + (y_1 J_2' + \cdots)^2\right] + c^2 \iiint (y_1 - y_0)^2 J_1^2 + \cdots e^{-\alpha\gamma[(y_1 - y_0)^2 + \cdots]}\right\}$$

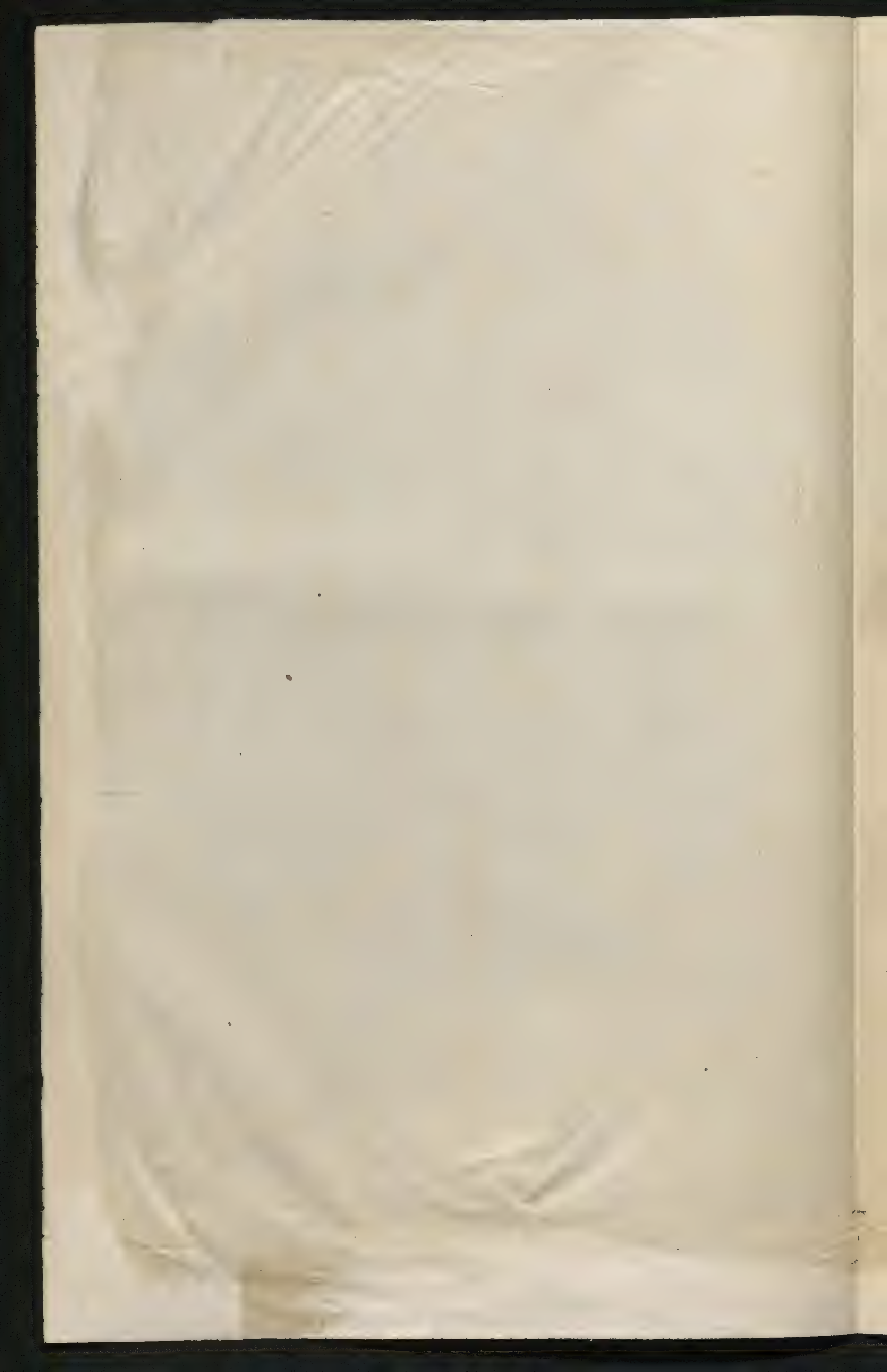
$$2\frac{1}{2\alpha\gamma}\left[J_0'^2 + 2J_2'^2 + \cdots\right]$$

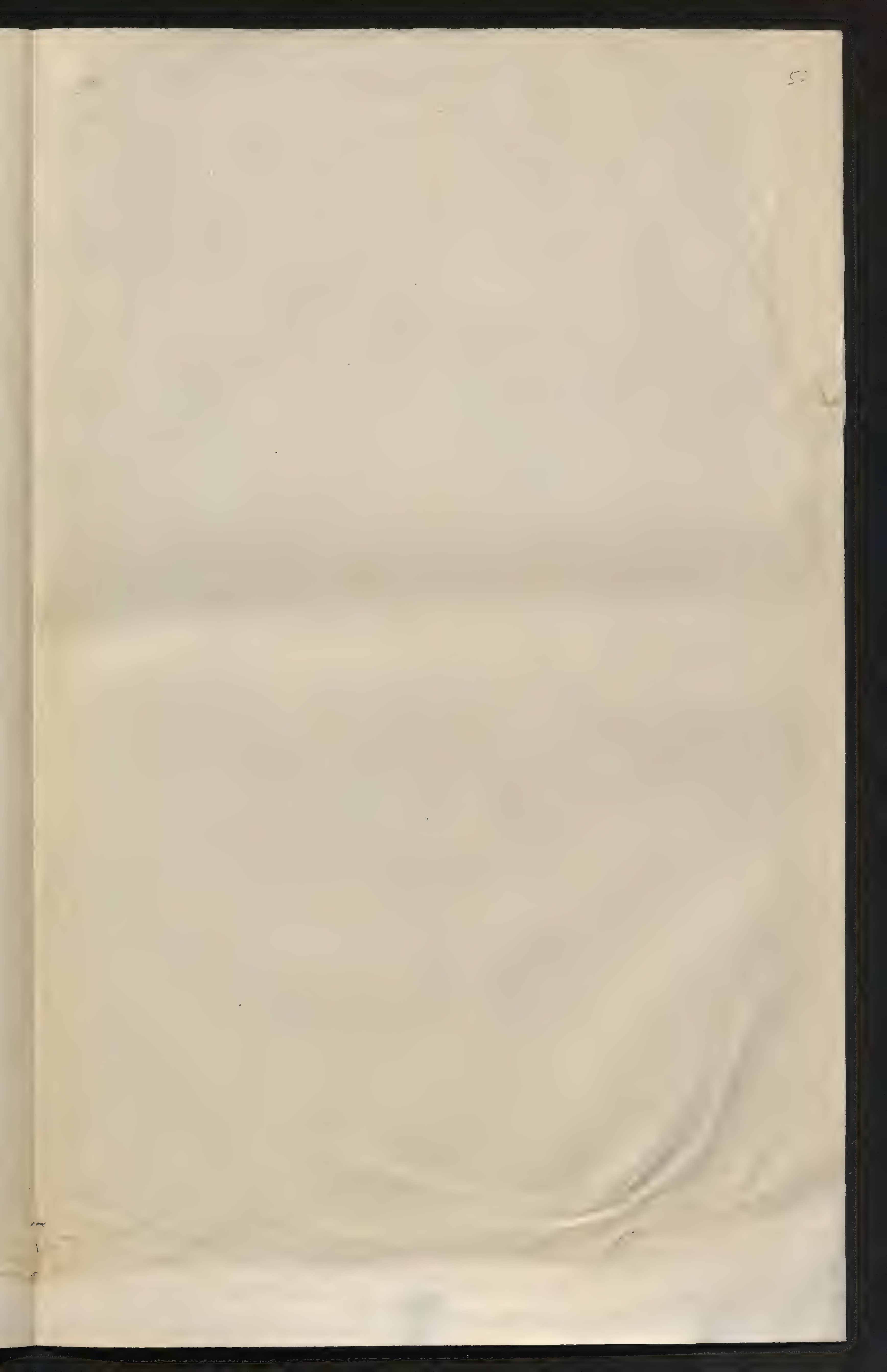
$$= \frac{1}{2\gamma}\left\{\underbrace{J_0^2 + 2\left[J_2^2 + J_4^2 + \cdots\right]}_{\frac{1}{2} + \frac{J_0(2x)}{2}} + 8\underbrace{\left[J_0'^2 + 2J_2'^2 + \cdots\right]}_{1 + 4J_1^2 - 2J_1(2x)}\right\}$$

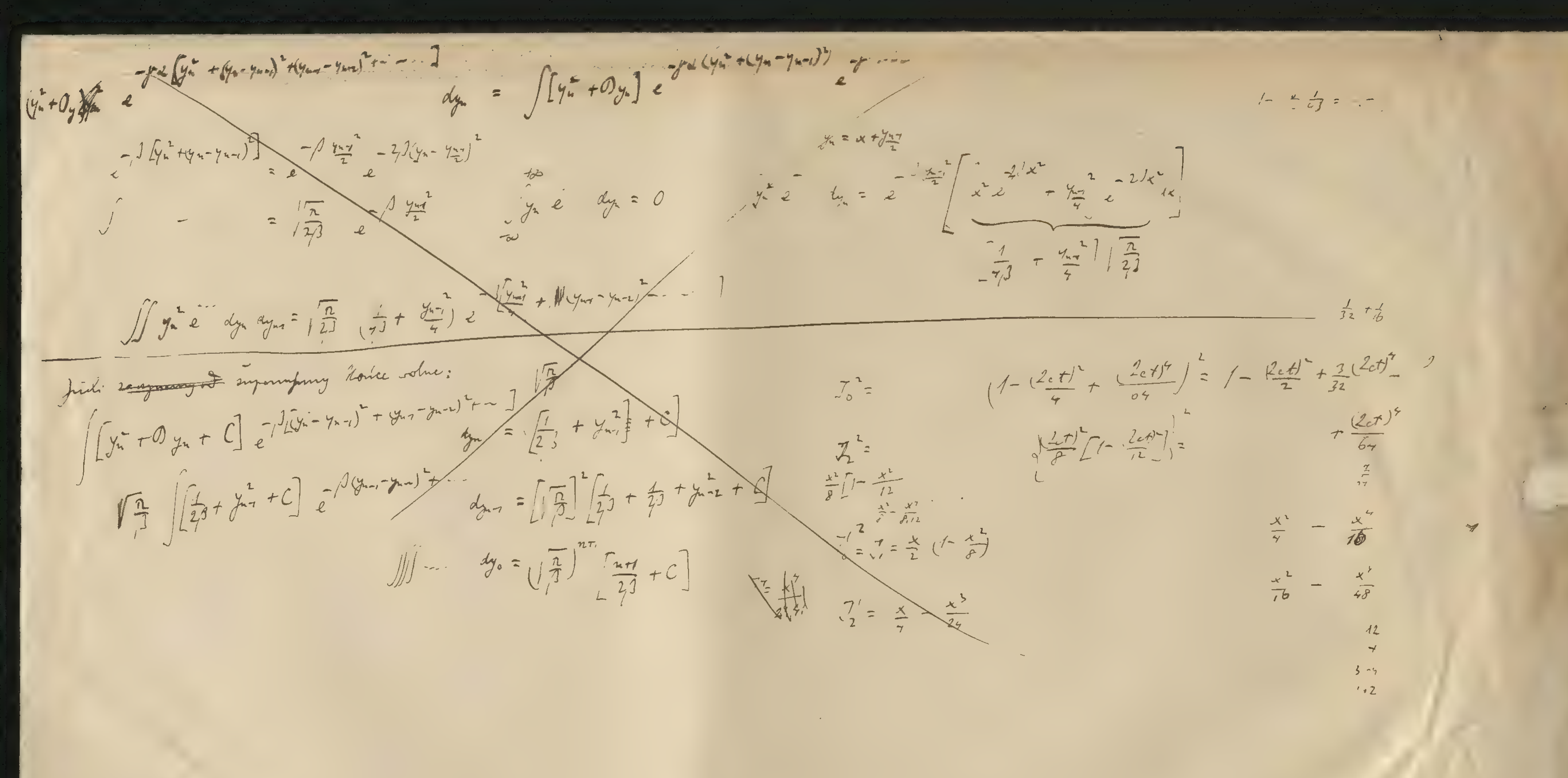
$$\frac{m}{2}\frac{c^2}{2\alpha\gamma}\left\{ \begin{matrix} J_1^2 + J_3^2 + \cdots \\ + J_1^2 + J_3^2 + \cdots \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\gamma} 2\left[J_1^2 + J_3^2 + \cdots\right]$$

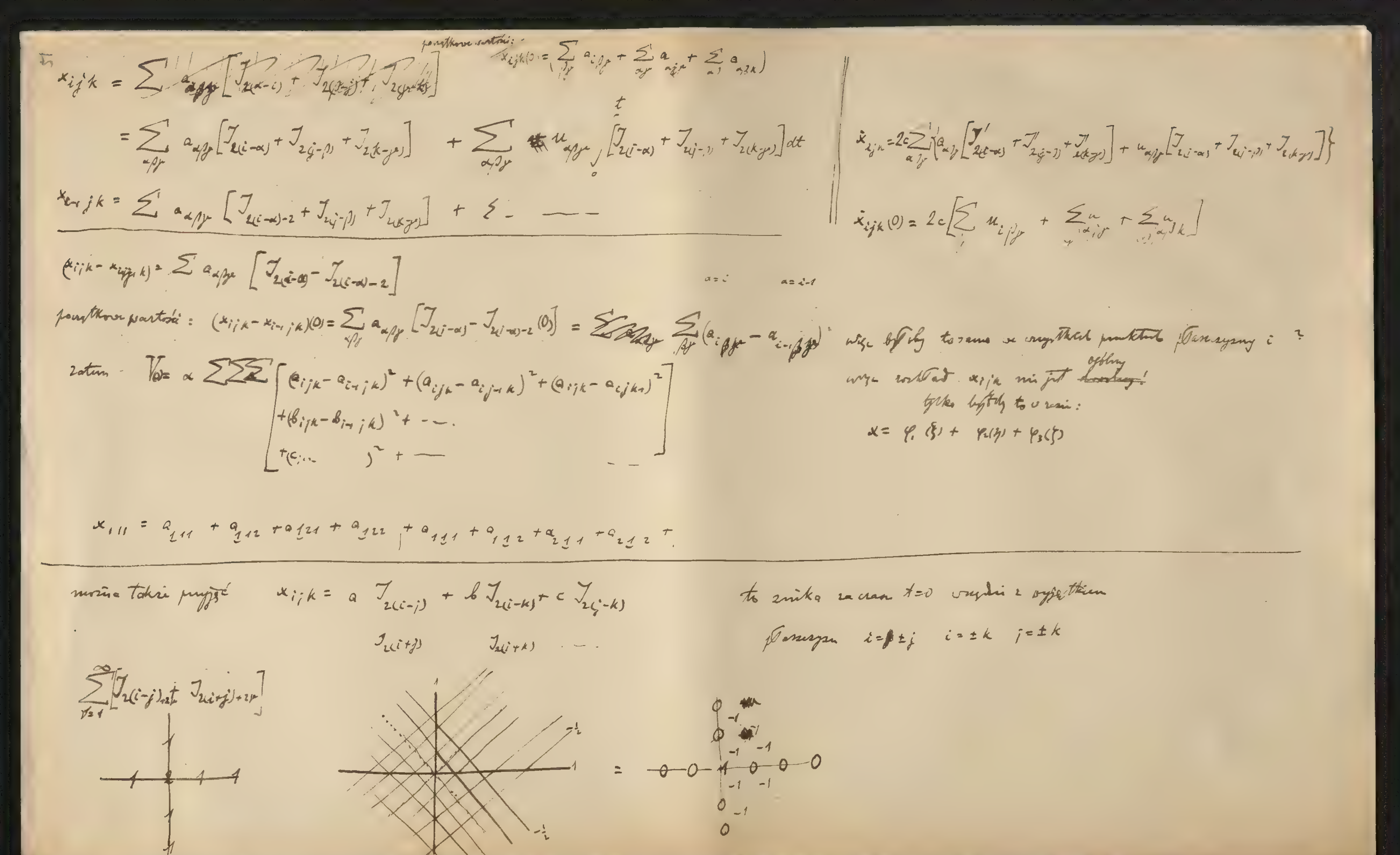
$$\frac{m}{2}\overline{\dot{y}_0^2(t)} = \frac{1}{2\gamma}\left\{\underbrace{J_0^2 + 2\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \cdots\right]}_{=1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\gamma}$$









warunki początkowe: $x_{ijk}(0) = \sum_{\beta\gamma} a_{i\beta\gamma} + \sum_{\alpha\gamma} a_{\alpha j\gamma} + \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta k}$

$$x_{ijk} = \sum a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(\alpha-i)} + J_{2(\beta-j)} + J_{2(\gamma-k)}\right]$$

$$= \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right] + \sum_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta\gamma}\int_0^t \left[J_{2(i-\alpha)} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right]dt$$

$$x_{i-1\,jk} = \sum a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)-2} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right] + \sum \ldots$$

$$\dot{x}_{ijk} = 2c\sum_{\alpha\beta\gamma}\left\{a_{\alpha\beta\gamma}\left[J'_{2(i-\alpha)} + J'_{2(j-\beta)} + J'_{2(k-\gamma)}\right] + u_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right]\right\}$$

$$\dot{x}_{ijk}(0) = 2c\left[\sum u_{i\beta\gamma} + \sum u_{\alpha j\gamma} + \sum u_{\alpha\beta k}\right]$$

$$(x_{ijk} - x_{i-1\,jk}) = \sum a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2}\right]$$

warunki początkowe: $(x_{ijk} - x_{i-1\,jk})(0) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2}(0)\right] = \sum_{\beta\gamma}(a_{i\beta\gamma} - a_{i-1\,\beta\gamma})$ $\quad \alpha = i \quad \alpha = i-1$

więc byłoby to samo w wszystkich punktach płaszczyzny $i$ ?

więc rozkład $x_{ijk}$ nie jest ogólny!

tylko byłoby to w razie:

$$x = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) + \varphi_3(\zeta)$$

zatem $V(0) = \alpha \sum\sum\sum \left[(a_{ijk} - a_{i-1\,jk})^2 + (a_{ijk} - a_{i\,j-1\,k})^2 + (a_{ijk} - a_{ij\,k-1})^2 + (b_{ijk} - b_{i-1\,jk})^2 + \ldots + (c_{i\ldots})^2 + \ldots\right]$

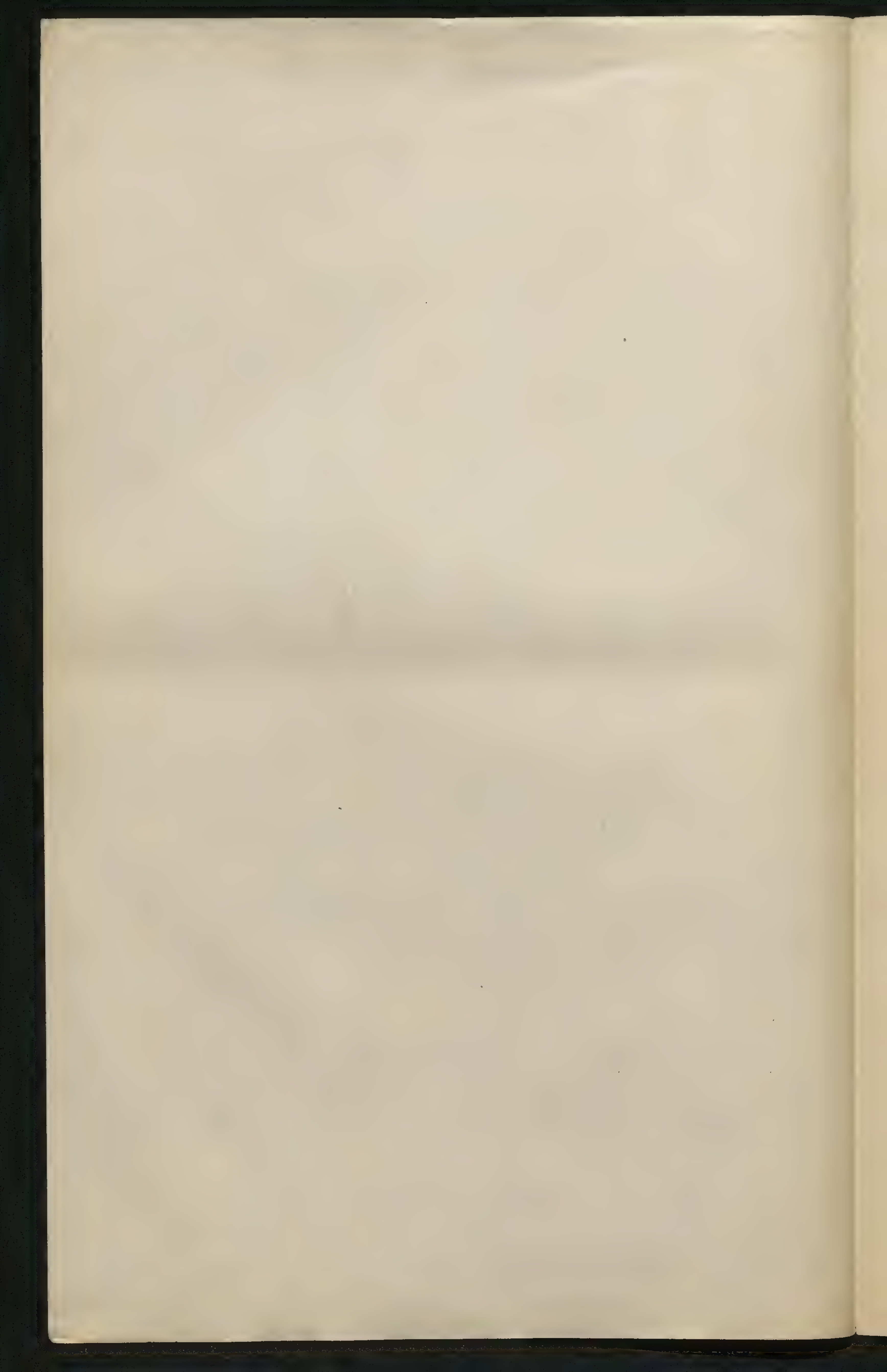
$$x_{111} = a_{111} + a_{112} + a_{121} + a_{122} + a_{111} + a_{112} + a_{211} + a_{212} + \ldots$$

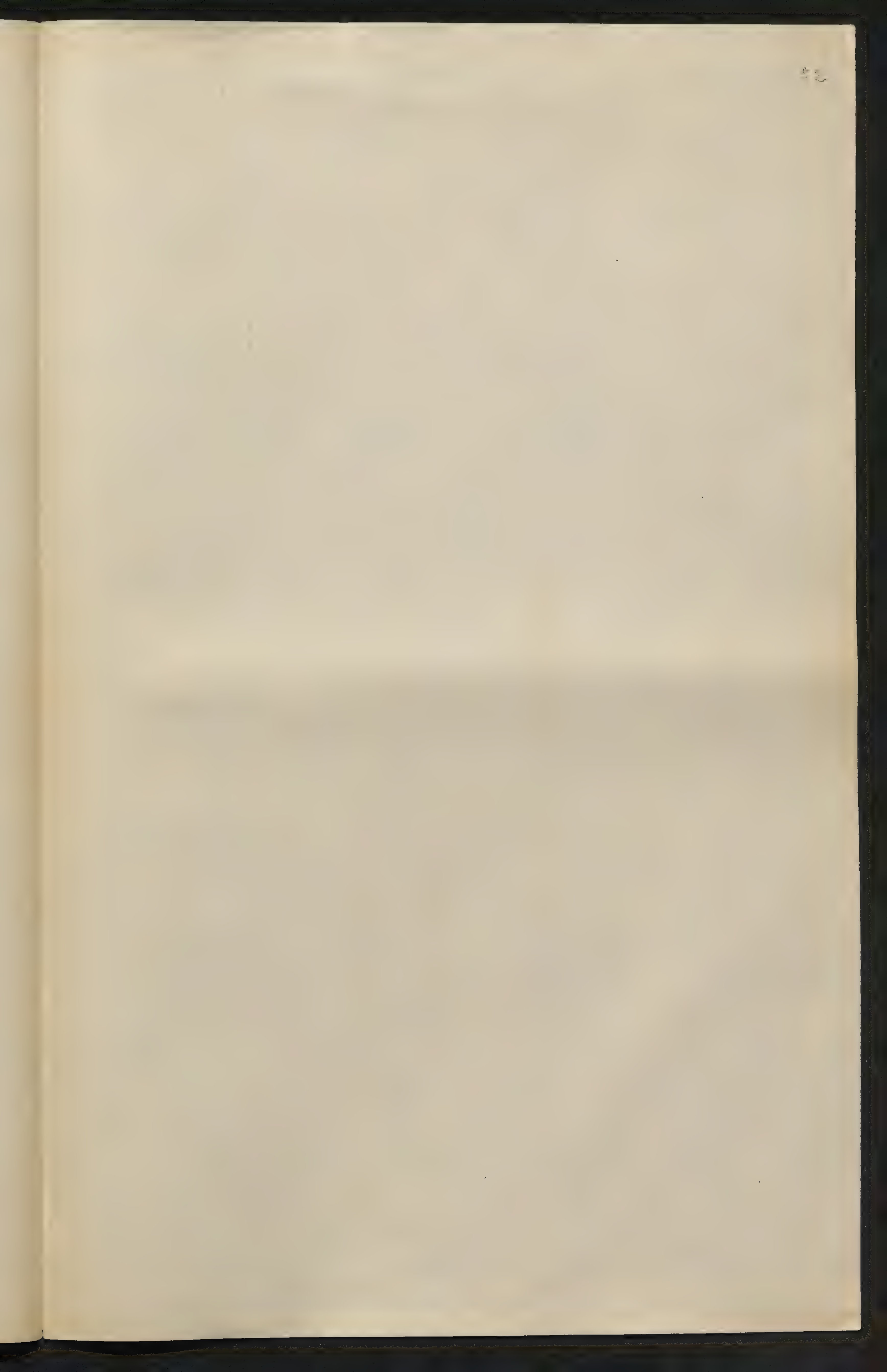
można także przyjąć $\quad x_{ijk} = a\,J_{2(i-j)} + b\,J_{2(i-k)} + c\,J_{2(j-k)}$

$J_{2(i+j)} \quad J_{2(i+k)} \quad \ldots$

to znika za czasu $t=0$ wszędzie z wyjątkiem płaszczyzn $i = \pm j \quad i = \pm k \quad j = \pm k$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[J_{2(i-j)+2\nu} + J_{2(i+j)+2\nu}\right]$$





$$J_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega - n\omega)\,d\omega$$

$$J_{2\nu} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi$$

$$J_{2\nu+2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu-2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\left[\cos(2n+2)\varphi - 2\cos(2n\varphi) + \underbrace{+\cos(2n-2)\varphi}_{2\cos 2n\varphi\cos 2\varphi}\right] +$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,(\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int \sin^2\varphi\cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi$$

$$= J''_{2\nu}$$

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos 2i\varphi\cos 2j\varphi\cos 2k\varphi\,d\varphi$$

$$\Delta_i + \Delta_j + \Delta_k = 3\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi)\cos 2i\varphi\cos 2j\varphi\cos 2k\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}S = \int \ldots \qquad = $$

$z=0$ $\qquad \psi = 2\varphi$

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2i\varphi)\cos 2j\varphi\cos 2k\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos i\psi\cos j\psi\cos k\psi\,d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\left[\cos(i+j)\psi + \cos(i-j)\psi\right]\cos k\psi\,d\psi = \frac{1}{4\pi}\int\left[\cos(i+j+k)\psi + \cos(i+j-k)\psi + \cos(i-j+k)\psi + \cos(i-j-k)\psi\right]d\psi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin(i+j+k)\pi}{i+j+k} + \frac{\sin(i+j-k)\pi}{i+j-k} + \ldots\right]$$

$= 0$ jesli albo $i+j+k = 0$, $i+j-k = 0$ ...

wyjdzie to samo jak $J_{2(i+j+k)}$ etc.

Siatka

$m\ddot{y}_{ij} = 2\alpha\left[(y_{i-1\,j} - 2y_{ij} + y_{i+1\,j}) + (y_{i\,j-1} - 2y_{ij} + y_{i\,j+1})\right]$

ponieważ $y_{ij}$ da się wyrazić jako liniowa funkcja $J_0\ J_1$ przyjmujemy $y_{ij} = J_0(x)\,\Phi_{ij}(x) + J_1\,\Psi_{ij}(x)$

$\dot{y} = 2c[J_0'\,\Phi + J_1'\,\Psi] + J_0\,\Phi' + J_1\,\Psi'$

$\ddot{y} = 4c^2[J_0''\,\Phi + J_1''\,\Psi] + 4c\,[J_0'\,\Phi' + J_1'\,\Psi'] + J_0\,\Phi'' + J_1\,\Psi''$

$J_0' = -J_1$

$= J_0\left[\Phi'' + 4c\,\Psi' - 4c^2\,\Phi - \frac{4c^2}{x}\,\Psi\right]$

$+ J_1\left[\Psi'' - 4c\frac{\Psi'}{x} - 4c\,\Phi' - 4c^2\,\Psi + \frac{8c^2}{x^2}\,\Psi + \frac{4c^2}{x}\,\Phi\right]$

$2J_1' = J_0 - J_2$

$\frac{2}{x}J_1 = J_0 + J_2$

$2(J_1' + \frac{J_1}{x}) = 2J_0$

$J_1' = J_0 - \frac{J_1}{x}$

$J_1'' = J_0' - \frac{J_1'}{x} + \frac{J_1}{x^2} = -J_1 - \frac{J_0}{x} + 2\frac{J_1}{x^2}$

$J_{\nu-1} = \frac{2\nu}{x}J_\nu - J_{\nu+1}$

Albo przyjmujemy: $y_{ij} = J_{2i}\,\Phi_j + J_{2i+1}\,\Psi_j$

$\dot{y} = J_{2i}'\,\Phi + J_{2i}\,\Phi_j'$

$\ddot{y} = J_{2i}''\,\Phi + 2J_{2i}'\,\Phi_j' + J_{2i}\,\Phi_j''$

$2J_{2i}'\,\Phi_j' + J_{2i}\,\Phi_j'' = J_{2i}\,\Delta\Phi_j + J_{2i+1}\,\Delta\Psi_j$

$+ 2J_{2i+1}'\,\Psi_j' + J_{2i+1}\,\Psi_j''$

$2J_{2i}' = J_{2i-1} - J_{2i+1} = \frac{4i}{x}J_{2i} - 2J_{2i+1}$

$2J_{2i+1}' = J_{2i} - J_{2i+2}$

$J_{2i+2} = \frac{4i+2}{x}J_{2i+1} - J_{2i}$

$= 2J_{2i} - \frac{4i+2}{x}J_{2i+1}$

$J_{2i}\left[\Phi_j'' + \frac{4i}{x}\Phi_j' + 2\Psi_j'\right] + J_{2i+1}\left[-2\Phi_j' - \frac{4i+2}{x}\Psi_j' + \Psi_j''\right] = J_{2i}\,\Delta_j^2\Phi + J_{2i+1}\,\Delta_j^2\Psi$

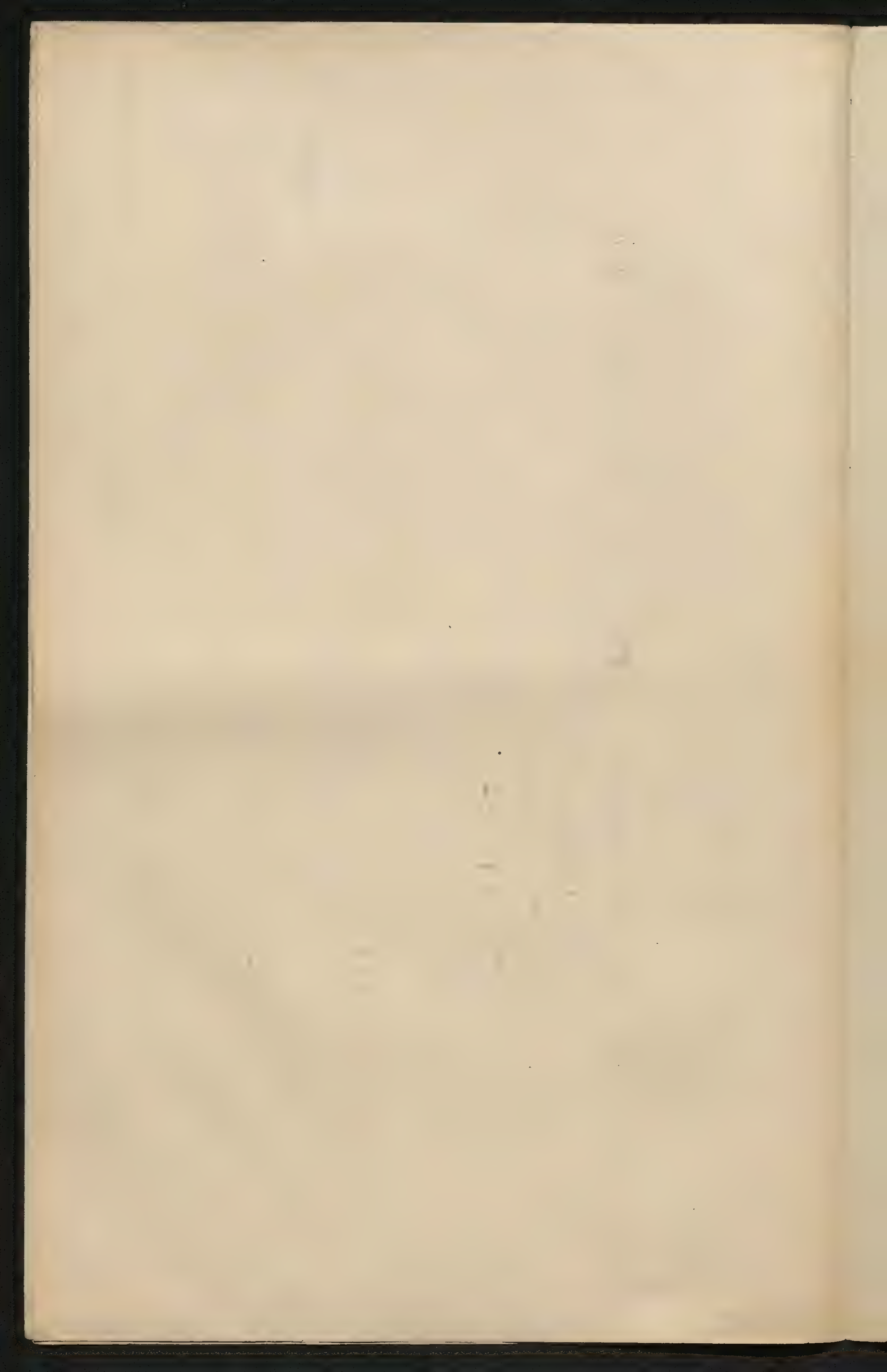
$\left[\Phi_j'' + \frac{4i}{x}\Phi_j' + 2\Psi_j'\right] = \Delta_j^2\Phi$

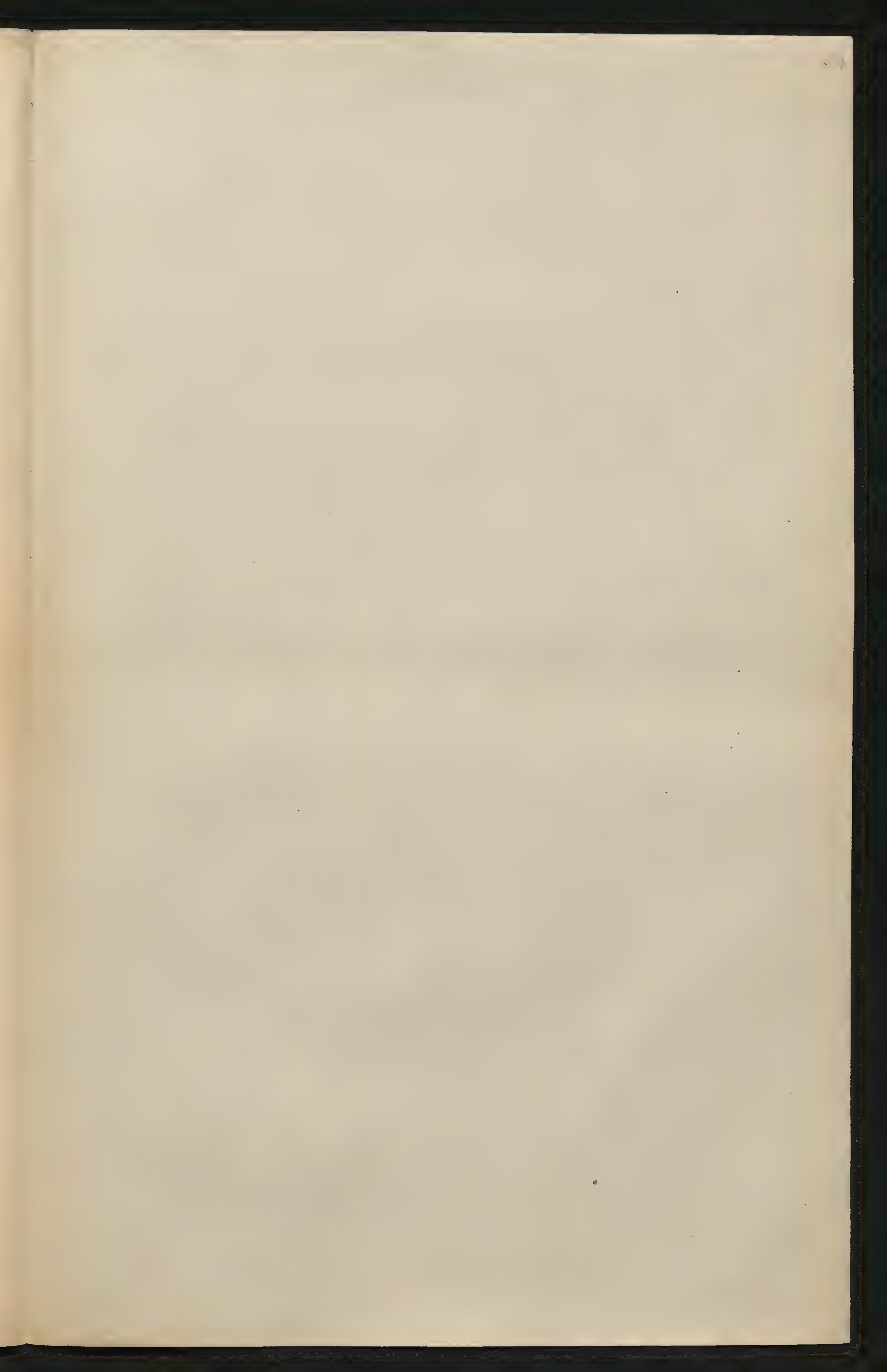
$\left[-2\Phi_j' - \frac{4i+2}{x}\Psi_j' + \Psi_j''\right] = \Delta_j^2\Psi$

$2\Psi_j' = \Delta_j^2\Phi - \Phi_j'' - \frac{4i}{x}\Phi_j'$

$2\Phi_j' = -\Delta_j^2\Psi + \Psi_j'' - \frac{4i+2}{x}\Psi_j'$

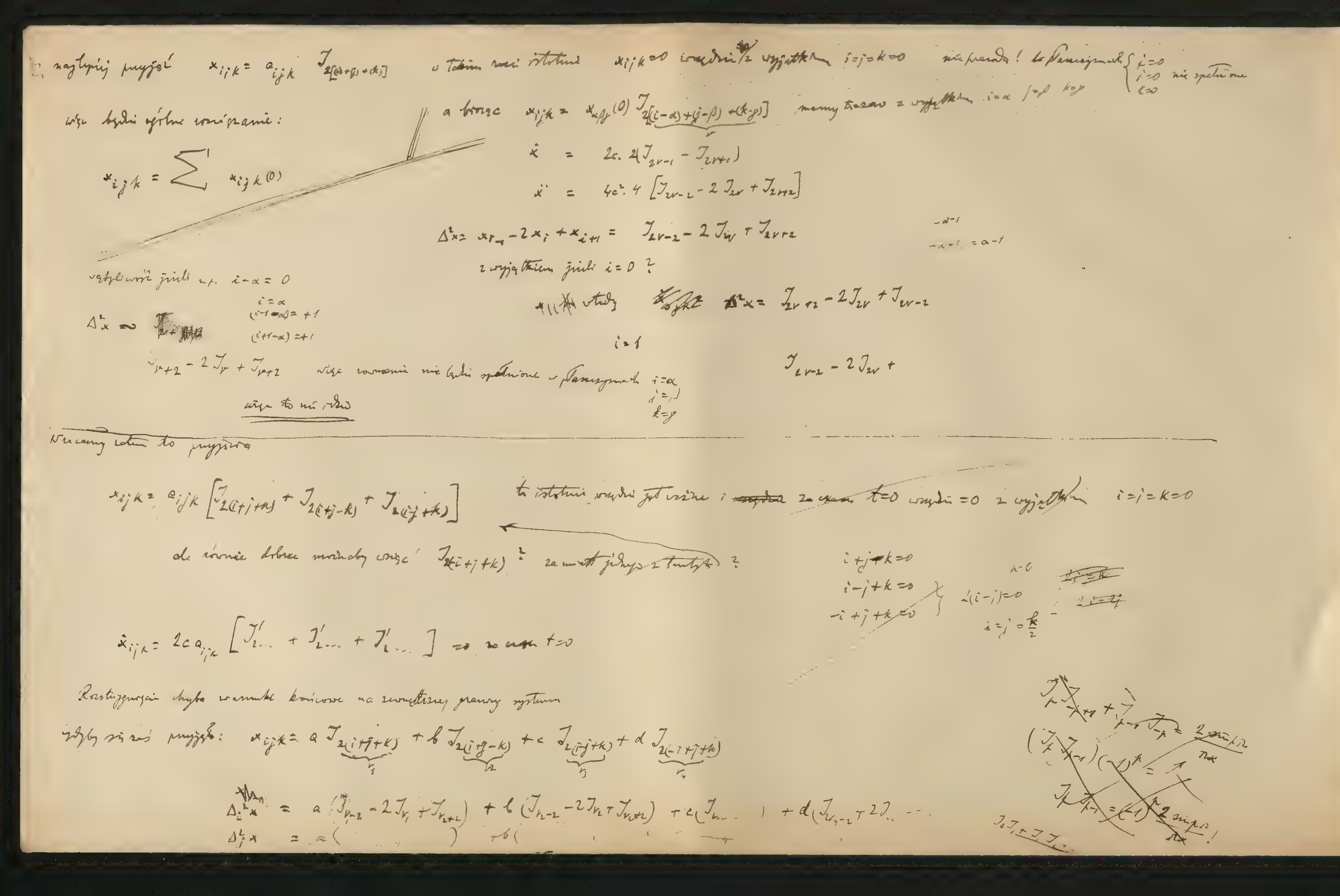
$4\Psi_j'' = 2\Delta_j^2\Phi' - 2\Phi_j''' - \frac{8i}{x}\Phi_j'' + \frac{8i}{x^2}\Phi'$





$$2\psi'' = -\Delta^4\psi + \Delta^2\psi'' - \frac{4i+2}{x}\Delta^2\psi' - \frac{4i}{x}\left[-\Delta^2\psi' + \psi''' - \frac{4i+2}{x}\psi''\right] + \frac{4i}{x^2}\left[-\Delta^2\psi + \psi'' - \frac{4i+2}{x}\psi'\right]$$

$$-\Delta^4\psi + \Delta^2\Big[\psi'' - \frac{4i+2}{x}\psi' + \frac{4i}{x}\psi -$$



Najlepiej przyjąć $x_{ijk} = a_{ijk}\, J_{2[(i)+(j)+(k)]}$ w takim razie istotnie $x_{ijk} = 0$ wszędzie z wyjątkiem $i=j=k=0$ nie prawda! bo w [illegible] $\begin{cases} i=0 \\ j=0 \\ k=0 \end{cases}$ nie spełnione

a biorąc $x_{ijk} = x_{\alpha\beta\gamma}(0)\, J_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]}$ mamy teraz z wyjątkiem $i=\alpha$ [illegible]

więc będzie ogólne rozwiązanie:

$$x_{ijk} = \sum x_{ijk}(0)$$

$$\dot{x} = 2c \cdot 2(J_{2\nu-1} - J_{2\nu+1})$$

$$\ddot{x} = 4c^2 \cdot 4\,[J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu+2}]$$

$$\Delta^2 x = x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} = J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu+2}$$

$-\alpha-1$

$-\alpha+1 = \alpha-1$

z wyjątkiem jeśli $i=0$?

wątpliwości jeśli np. $i-\alpha = 0$

$i = \alpha$

$(i-1-\alpha) = +1$

$(i+1-\alpha) = +1$

$\Delta^2 x =$ [illegible]

$x_{111}$ wtedy [illegible] $\Delta^2 x = J_{2\nu+2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu-2}$

$i=1$

$J_{\nu+2} - 2J_{\nu} + J_{\nu+2}$ więc równanie nie będzie spełnione w [illegible] $i=\alpha$, $j=\beta$, $k=\gamma$

$J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} +$

więc to nic złego

---

Wracamy zatem do przypadku

$$x_{ijk} = a_{ijk}\left[J_{2(i+j+k)} + J_{2(i+j-k)} + J_{2(i-j+k)}\right]$$

to istotnie wszędzie jest równe i [illegible] za czasu $t=0$ wszędzie $=0$ z wyjątkiem $i=j=k=0$

ale równie dobrze moglibyśmy wziąć $J_{2(-i+j+k)}$? zamiast jednego z trzech?

$i+j+k=0$

$i-j+k=0$

$-i+j+k=0$

$k=0$

$2(i-j)=0$

$i=j=\frac{k}{2}$

$$\dot{x}_{ijk} = 2c\,a_{ijk}\left[J'_{2\ldots} + J'_{2\ldots} + J'_{2\ldots}\right] = 0 \text{ za czasu } t=0$$

Rozstrzygnąć chyba warunki końcowe na zewnętrznej granicy systemu

trzeba się zaś przyjąć:

$$x_{ijk} = a\,J_{2(i+j+k)} + b\,J_{2(i+j-k)} + c\,J_{2(i-j+k)} + d\,J_{2(-i+j+k)}$$

(pod wskaźnikami: $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, $\nu_4$)

$$\Delta_i^2 x = a\,(J_{\nu_1-2} - 2J_{\nu_1} + J_{\nu_1+2}) + b\,(J_{\nu_2-2} - 2J_{\nu_2} + J_{\nu_2+2}) + c\,(J_{\ldots}) + d\,(J_{2\nu_4-2} + 2J \ldots)$$

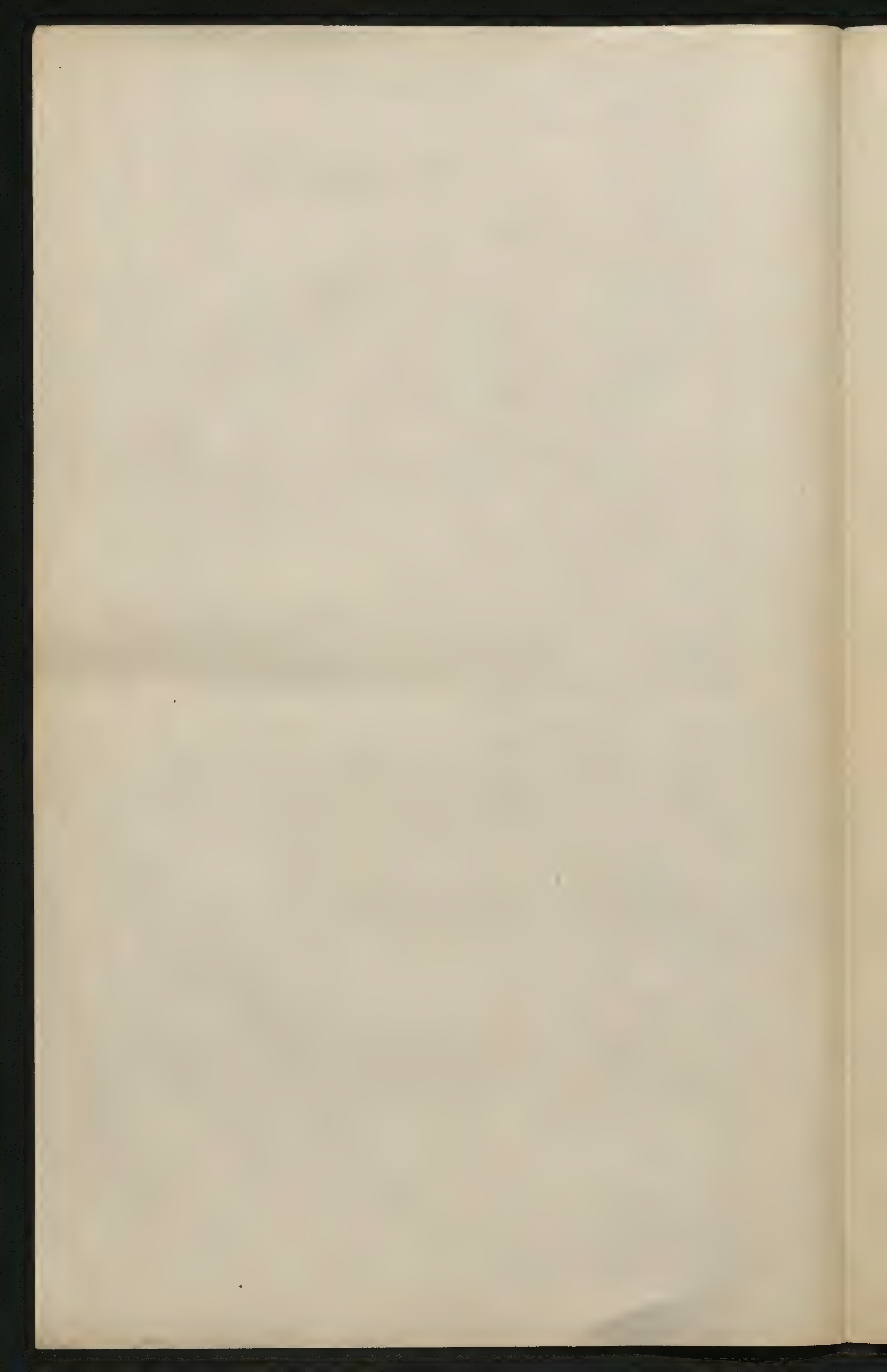
$$\Delta_j^2 x = a(\quad) + b(\quad)$$

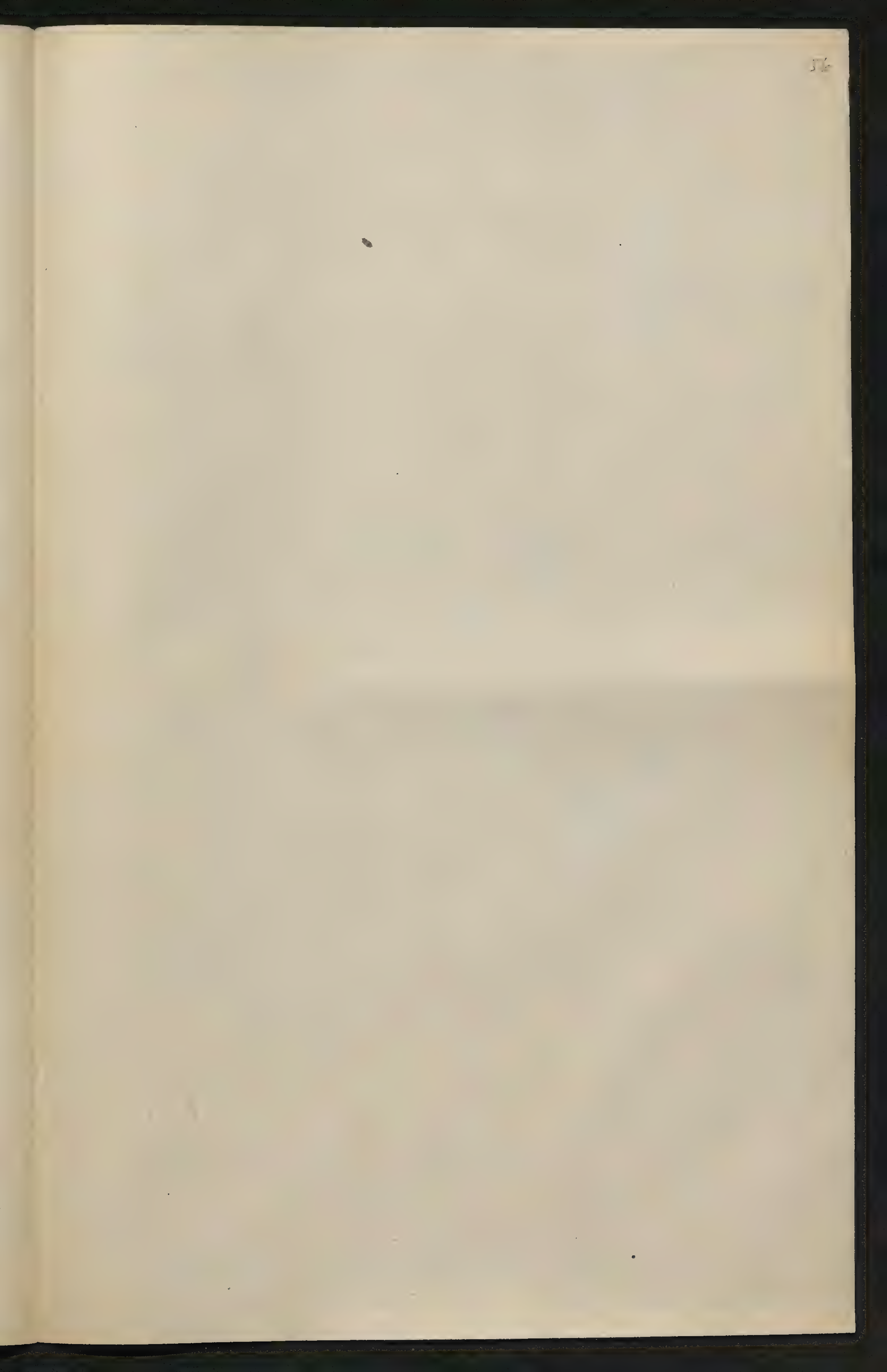
$J_{\mu}J_{-\mu+1} + J_{\mu-1}J_{-\mu} = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi x}$

$(J_{\mu}J_{-\mu-1})(-1)^{\mu} = $

$J_{\mu}J_{\mu-1} = (-1)^{\mu}\frac{2\sin\mu\pi}{\pi x}$!

$J_0 J_1 + J_1 J_0$





$A^2_{\kappa\alpha} =$

$c^2 \ddot{x}_{ijk} = a\,(J_{4\nu_1-2} - 2J_{4\nu_1} + J_{4\nu_1+2}) + \dots$

$c^2 m = 6a$ ~~...~~ zginie RR

zaczem $t=0$
wszędzie (dla $a, b, c, d > 0$) ~~...~~ $a\,J_{\nu_1}(0) + b\,J_{\nu_2}(0) + c\,J_{\nu_3}(0) + d\,J_{\nu_4}(0)$

$x_{ijk} = a$ w punktach gdzie $\nu_1 = 0$ $\quad i+j+k=0$

$x_{ijk} = b$ $\quad$ " $\quad i+j-k=0$

$x_{i}\ \ c$ $\quad$ etc.

$x$

$J_0'' = -J_1' = 2J_1 - J_0)$

$= J_2 - 2J_0 + J_2$

$2J'_{\nu+1} = J_\nu - J_{\nu+2}$ $\quad$ " $\quad J_{\nu-2} - 2J_\nu + J_{\nu+2} = 2(J'_{\nu-1} - J'_{\nu+1}) = 2J''_\nu$

$2J'_\nu = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$

$2J'_1 = J_0 - J_2$

$2J'_0 = J_{-1} - J_1$

$= -2J_1$

$2J'_{-1} = J_{-2} - J_0$

$J_0 + 2[J_2 + J_4 + J_6 + \dots] = 1$

$J_1 + 3J_3 + 5J_5 + \dots = \frac{2}{2}$

$J_0 - 2J_2 + 2J_4 - \dots = \cos 2$

$2(J_1 - J_3 + J_5 - \dots) = \sin 2$

~~$y_0 = y_0 J_0 +$~~ *[illegible]*

$y_0 = y_1 J_2 + y_2 J_4 + y_3 J_6 + y_4 J_8 + \dots$

$+ \dot y_1 \int J_2 dt + \dot y_2 \int J_4 dt + \dot y_3 \int J_6 dt + \dots$

$\frac{\dot y_0}{2c} = 2c\,[y_1 J_2' + y_2 J_4' + y_3 J_6' + \dots] +$

$+ \dot y_1 J_2 + \dot y_2 J_4 + \dot y_3 J_6 + \dots$

$y_1 = y_1 J_0 + y_2 J_2 + y_3 J_4 + y_4 J_6 + \dots$

$+ \dot y_1 \int J_0 dt + \dot y_2 \int J_2 dt + \dots$

$W(y_1\, y_2 \dots \dot y_1\, \dot y_2 \dots) = A\, e^{-h\left\{\alpha\left[(y_1-y_2)^2 + (y_2-y_3)^2 + \dots\right] + \frac{m}{2}\left[\dot y_1^2 + \dot y_2^2 + \dot y_3^2 + \dots\right]\right\}}\, dy_1\, dy_2 \dots d\dot y_1\, d\dot y_2 \dots$

$+(y_0-y_1)^2 + y_1 - y_2$

$y_1 - y_2 = x$

$\int e^{-\beta(y_1-y_2)^2} y_1^2\, dy_1 = \int e^{-\beta x^2}(x+y_2)^2 dx = \int x^2 e^{-\beta x^2} dx + y_2^2 \int e^{-\beta x^2} dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(y_1-y_2)^2} y_1\, dy_1 = 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(y_1-y_2)^2} dy_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

$c^2 = \frac{2\alpha}{m}$

~~$\dot y_0\, y_0 = \frac{1}{2c}\left[y_1 J_0 J_2 + y_2 J_2 J_4 + \dots\right]$~~

*[illegible]* od $-\infty$ do $+\infty$ stále temperature:

$\overline{\dot y_0^2(t)} = \overline{\dot y_0^2}\left\{J_0^2 + 2\left[J_2^2 + J_4^2 + \dots\right]\right\} + 4c^2\left[\overline{y_0^2}\, J_0'^2 + 2\overline{y_1^2}\, J_2'^2 + \dots\right]$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} J_0(2x) - J_0^2$

~~$J_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} J_0(2x)$~~ ~~$J_1^2 = \frac{J_0(2x) + J_2(2x)}{2}$~~

$\int e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

$\int x^2 e^{-\beta x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$

$\frac{\int x^2 e^{-\beta x^2}}{\int e^{-\beta x^2}} = \frac{1}{2\beta}$

$\int e^{-\beta\left[(y_0-y_1)^2 + (y_0-y_{-1})^2\right]} dy_0 = \int e^{-\beta\left[2y_0^2 - 2y_0(y_1+y_{-1}) + y_1^2 + y_{-1}^2\right]} dy_0$

$= e^{-2\beta\left[\left(y_0 - \frac{y_1+y_{-1}}{2}\right)^2 + \frac{y_1^2+y_{-1}^2}{2} - \left(\frac{y_1+y_{-1}}{2}\right)^2\right]} = e^{-\frac{\beta}{2}(y_1-y_{-1})^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$

$+\frac{y_1^2 - 2y_{-1}y_1 + y_{-1}^2}{4}$

$e^{-\beta\left[y_0^2 + (y_0-y_1)^2\right]} = e^{-\beta(2y_0^2 - 2y_0y_1 + y_1^2)}$

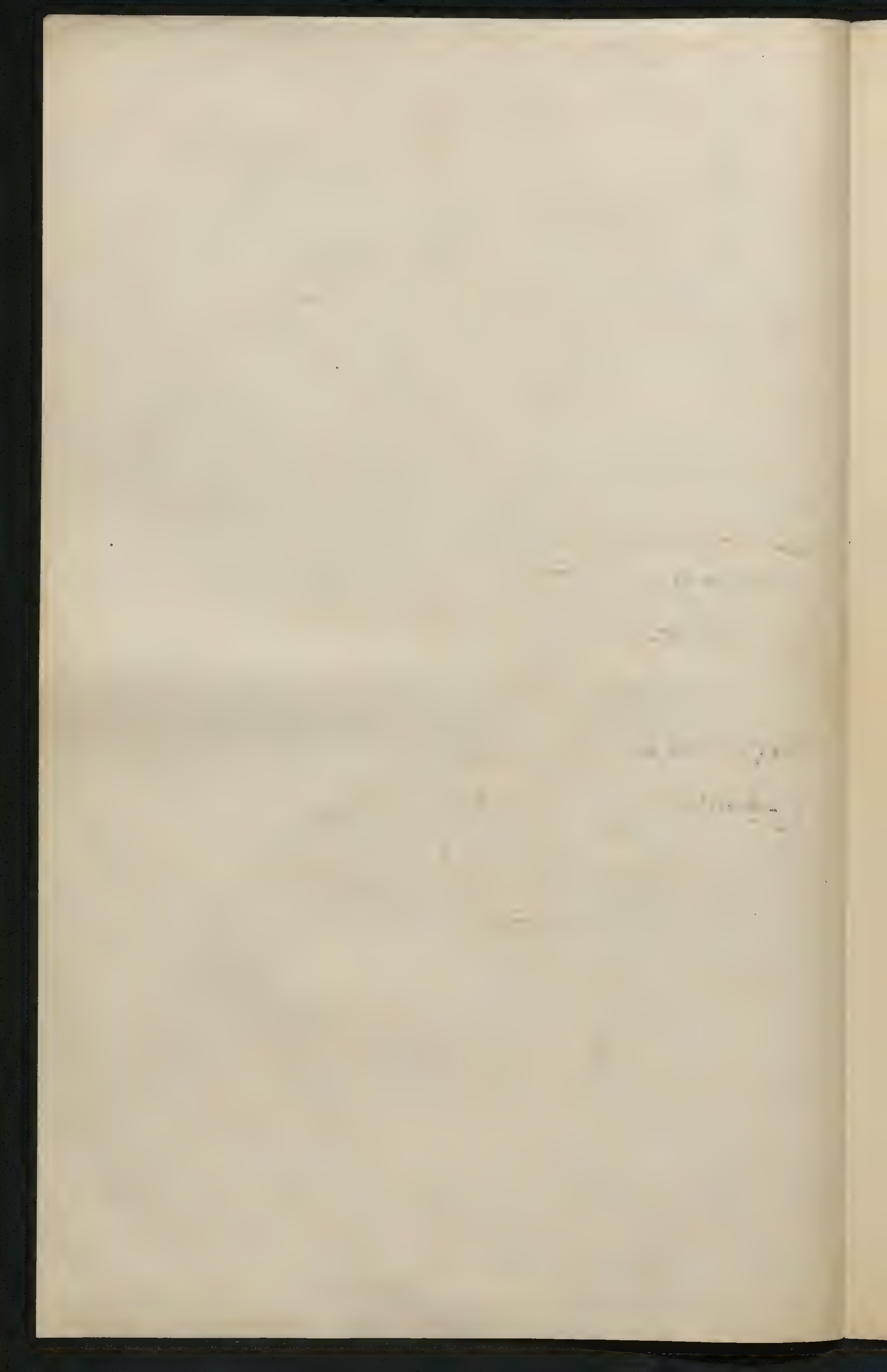
$= e^{-2\beta\left(y_0^2 - y_0y_1 + \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{4}\right)}$

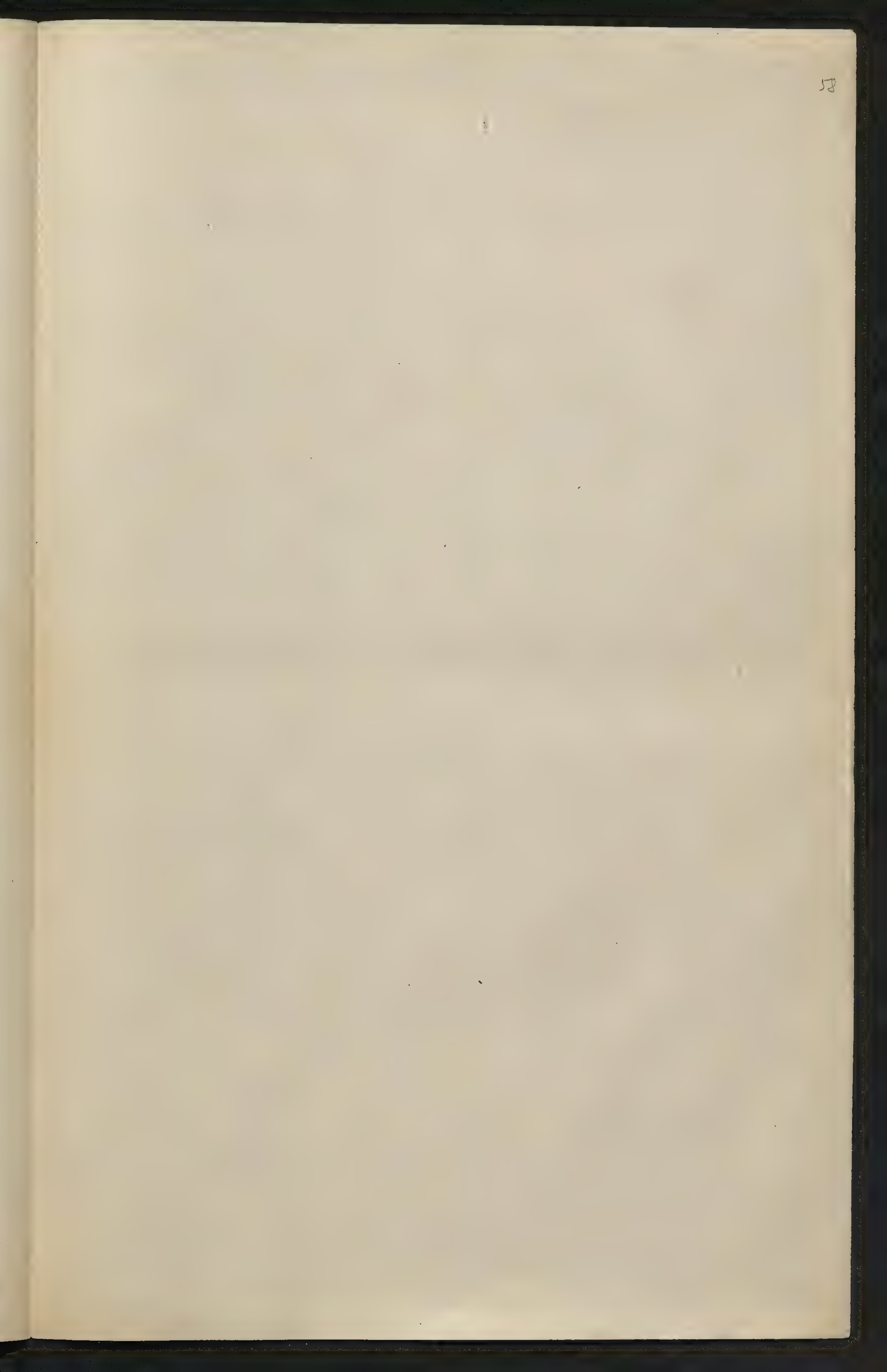
$= e^{-\frac{\beta y_1^2}{2}}\, e^{-2\beta\left(y_0 - \frac{y_1}{2}\right)^2}$

$2J_{k-1}' = J_{k-2} - J_k$

$2J_{k+1}' = J_k - J_{k+2}$

$4J_k'' = J_{k-2} - 2J_k + J_{k+2}$





kręgu $y_i = a\, J_{2i}(2ct)$ — zaczem $t=0$, $y_i = a$

$\dot y_i = 2ac\, J'_{2i} = ac(J_{2i-1} - J_{2i+1})$, $\dot y = 0$

ale równie dobrze mogłoby się $y_i = a\, J_{2i}(2ct) + b\, J'_{2i}(2ct)$ ?

Nie prawda bo stały $\dot y_i$ — $J''_{2i} = J_{2i-2} - 2J_{2i} + J_{2i+2}$

~~ale można by przyjąć $y_i = aJ$~~

$J_0(\sqrt{x})$

$\frac{J'_0(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $\quad - \frac{J'_0(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}^3} + \frac{J''_0(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}$

$- J'_1 + J'_{-1}$

$- J_{-2} + 2J_0 - J_2$

$$J'_{2\nu} - J'_{4n-2\nu} - J'_{4n+2\nu} + J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu} - \dots$$

$$= (-1)^\nu \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1 - 2 + 2 \dots\right) - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x}\left[\frac{2\nu^2}{2} - (4n-2\nu)^2 - (4n+2\nu)^2 + (8n-2\nu)^2 + (8n+2\nu)^2 \dots\right.\right.$$

$$-2(16n^2+4\nu^2) \qquad +2(16\cdot 4n^2+4\nu^2) \dots$$

16

Trzy wymiary:

$$V = \alpha \Big[\sum (x_k - x_{k-1})^2 +$$

$$= \sum\sum\sum \{ (x_{ijk} - x_{i-1\,jk})^2 + (y_{ijk} - y_{i\,j-1\,k})^2 + (z_{ijk} - z_{ij\,k-1})^2 \} \Big\| T = + \frac{m}{2} (\dot{x}_{ijk}^2 + \dot{y}_{ijk}^2 + \dot{z}_{ijk}^2) \Big]$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_{ijk}} = 2\alpha\, (-x_{i+1\,jk} + 2x_{ijk} - x_{i-1\,jk})$$

$$m\, \ddot{x}_{ijk} = 2\alpha\, [x_{i+1\,jk} - 2x_{ijk} + x_{i-1\,jk}] \quad \Big\| \quad m\, \ddot{y}_{ijk} = 2\alpha\, [y_{i\,j+1\,k} - 2y_{ijk} + y_{i\,j-1\,k}] \Big\|$$

etc.

$$x_{ijk} = \sum x_{ijk}(0)\, J_{2i}(2ct) + \dot{x} \ldots \int J\, dt \quad \Big\| \quad y_{ijk} = \sum y_{ijk}(0)\, J$$

Przenoszenie energii w kierunku X: $\sum'_{jk} (x_{0jk} - x_{1jk})\, \dot{x}_{0jk}$ — w takim razie pozostałby poprzedni rezultat że prąd $\sim \frac{1}{t}$

ale to dlatego że tutaj energia płynie tylko w kierunku liniowym (~~……~~, wzdłuż X, albo Y, albo Z; i nie rozchodzi się przestrzennie

---

Jeśli zaś:

$$m\, \ddot{x}_{ijk} = 2\alpha \Big[(x_{i-1\,jk} - 2x_{ijk} + x_{i+1\,jk}) + (x_{i\,j-1\,k} - 2x_{ijk} + x_{i\,j+1\,k}) + (x_{ij\,k-1} - 2x_{ijk} + x_{ij\,k+1})\Big] \text{ etc.}$$

$$V = \sum \alpha \Big\{ \big[(x_{ijk} - x_{i-1\,jk})^2 + (x_{ijk} - x_{i\,j-1\,k})^2 + (x_{ijk} - x_{ij\,k+1})^2\big] + \big[(y_{ijk} \ldots)^2 - \big] + \big[z_{ijk} - - \big] \Big\}$$

tylko na granicy

$$m\, \ddot{x}_{J,jk} = 2\alpha \big[(x_{J-1,\,jk} - x_{J,jk}) + \ldots\big]$$

to uwzględnić można za pomocą superpozycji odbitych zworycia ?

~~$x_{0jk}$~~ $= \sum$ Szczególne rozwiązanie:

$$x_{ijk} = a\, J_{2i} + b\, J_{2j} + c\, J_{2k}$$

w czasie $t = 0$: wszędzie $x = 0$ z wyjątkiem wszystkich $x_{0jk} = a$

$x_{i0k} = b$

$x_{ij0} = c$ etc.

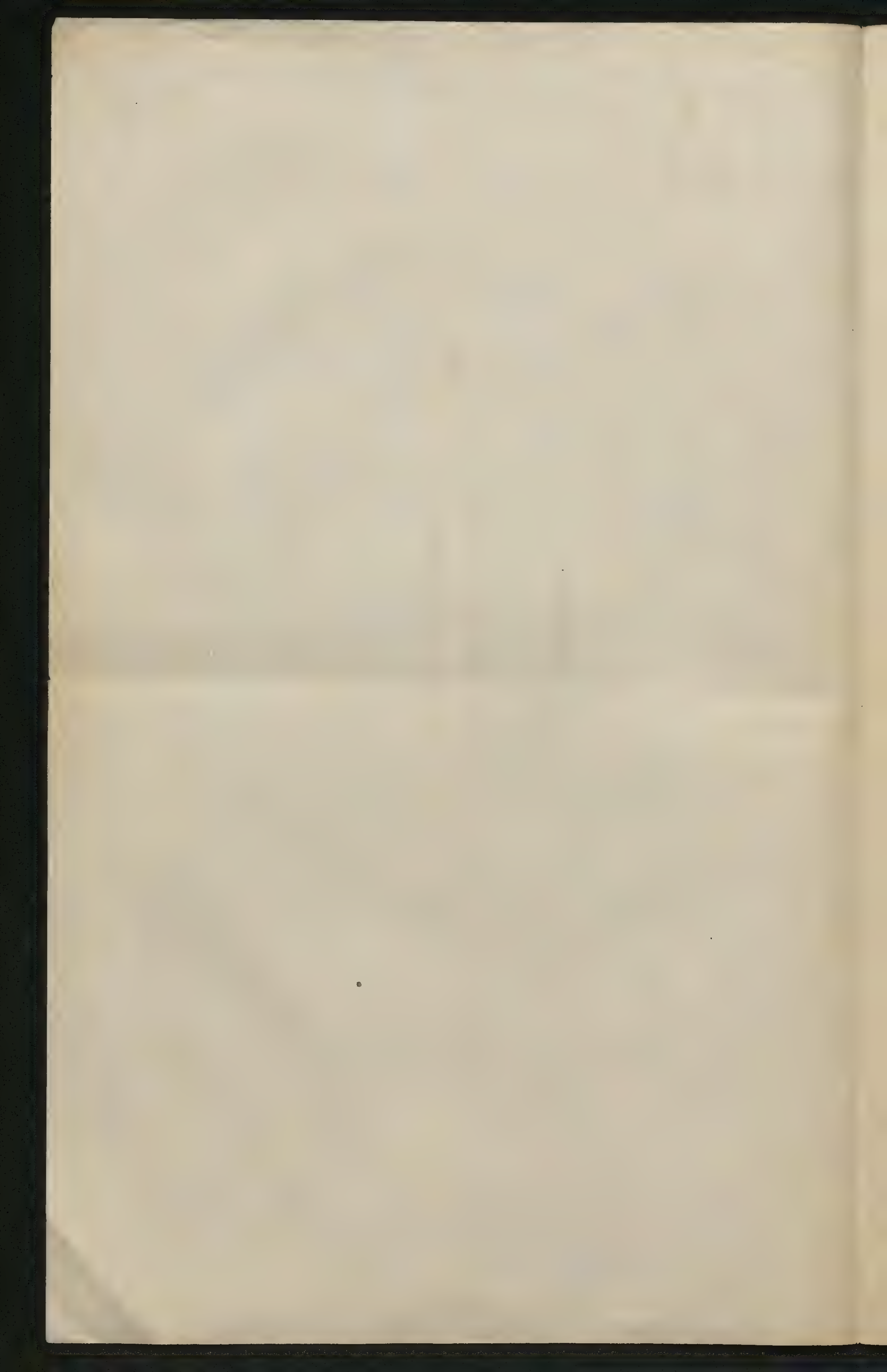
$x_{000} = a + b + c$

biorąc $x_{ijk} = a\, J_{2i}\, J_{2j}\, J_{2k}$ nie idzie!

$$\dot{x} = 2ac \big[J'_{2i}\, J_{2j}\, J_{2k} + \ldots\big]$$

$$= ac \big[J_{2i-1}\, J_{2j}\, J_{2k} - J_{2i+1}\, J_{2j}\, J_{2k} + J_{2i}\, J_{2j-1}\, J_{2k} - J_{2i}\, J_{2j+1}\, J_{2k}$$

$$\ddot{x} = \frac{ac}{2} \Big\{ (J_{2i-2} - 2J_{2i} + J_{2i+2})\, J_{2j} J_{2k} + J_{2i-1}\, J_{2j-1}\, J_{2k} - J_{2i-1}\, J_{2j+1}\, J_{2k} + J_{2i-1}\, J_{2j}\, J_{2k-1} - \ldots$$



$$J_\mu(z)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2n x \; J_\alpha(2z\sin x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi dx \sin 2nx \int_0^\pi \cos\left[2z\sin x \sin\omega - n\omega\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi^2} \cos(\mu-\nu)\eta\, d\eta \int_0^{\pi^2} \cos\left[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\mu+\nu)\vartheta\right] d\vartheta$$

$$\underbrace{\cos\left[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\mu+\nu)\vartheta\right]}_{J_{\mu+\nu}(2z\cos\eta)}$$

$$J_\nu(z)\,J_\mu(z) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega - \nu\omega)\,d\omega \;\cos(z\sin\varphi - \mu\varphi)\,d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\left\{\cos\left[z(\sin\omega+\sin\varphi) - (\nu\omega+\mu\varphi)\right] + \cos\left[z(\sin\omega-\sin\varphi) - (\nu\omega-\mu\varphi)\right]\right\} d\varphi\, d\omega$$

$$\sin\omega+\sin\varphi = 2\cos\tfrac{\omega-\varphi}{2}\sin\tfrac{\omega+\varphi}{2} \qquad \sin\omega-\sin\varphi = 2\cos\tfrac{\omega+\varphi}{2}\sin\tfrac{\omega-\varphi}{2}$$

$$\frac{\omega+\varphi}{2} = \vartheta \qquad \omega = \eta+\vartheta$$

$$\frac{\omega-\varphi}{2} = \eta \qquad \varphi = \vartheta-\eta$$

$$\cos\left[2z\sin\eta\cos\vartheta - \nu(\eta+\vartheta) + \mu(\vartheta-\eta)\right]$$

$$-(\nu+\mu)\eta - (\nu-\mu)\vartheta$$

$$\cos\left[2z\cos\eta\sin\vartheta - \nu(\eta+\vartheta) - \mu(\vartheta-\eta)\right]$$

$$\cos\left[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\nu+\mu)\vartheta + (\mu-\nu)\eta\right]$$

$$= \cos\left[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\nu+\mu)\vartheta\right]\cos(\mu-\nu)\eta + \cos\left[2z\sin\eta\cos\vartheta - (\nu+\mu)\eta\right]\cos(\nu-\mu)\vartheta$$

$$- \sin\left[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\nu+\mu)\vartheta\right]\sin(\mu-\nu)\eta + \sin\left[2z\sin\eta\cos\vartheta - (\nu+\mu)\eta\right]\sin(\nu-\mu)\eta$$

$x_{ijk}(0) = \sum_{i} a_{ijk} + \sum_{j} b_{ijk} + \sum_{k} c_{ijk}$

– $b$ – nie są niezależnie dowolne

może lepiej wyrazić $x_{ijk} = a (J_{2i} + J_{2j} + J_{2k})$

$x_{ijk}(0) = \sum_{i} + \sum_{j} + \sum_{k} a_{ijk}$

rozwiązać wzgl. $a_{ijk}$!

albo też wprowadzić $a_{ijk}$ jako nowe współrzędne! zamiast $x_{ijk}$

---

biorę $J_{2(i+j-k)}$

$\Delta_i^2 x = J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu+2}$

$\Delta_j^2 x =$

$\Delta_k^2 x = J_{2\nu+2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu-2}$

$- J_{2i+1} J_{2j-1} J_{2k} + J_{2i+1} J_{2j+1} J_{2k} + J_{2i+1} J_{2j} J_{2k+1} - J_{2i} \ldots J_{2k+1}$

$+ J_{2i} (J_{2j-2} - 2J_{2j} \ldots) J_{2k} + J_{2i-1} J_{2j-1} J_{2k} - J_{2i+1} J_{2j-1} J_{2k} + J_{2i} J_{2j-1} J_{2k-1}$

$- J_{2i-1} J_{2j+1} J_{2k} + J_{2i+1} J_{2j+1} J_{2k} + J_{2i} J_{2j+1} J_{2k-1} - J_{2i} J_{2j+1} J_{2k}$

$+ J_{2i} J_{2j-1} J_{2k-1} - J_{2i} J_{2j+1} J_{2k-1} +$

Weźmy raz $x_{ijk} = a_{ijk} J_{2(i+j+k)}$

$m \ddot{x} = m_2 \left[ J_{2(i+j+k)-2} - 2 J_{2(\ldots)} + J_{2(i+j+k)+2} \right] 4c^2$

$2\alpha (x_{i+1jk} - 2x_{ijk} + x_{i-1jk}) = \left| J_{2(i+j+k)-2} - 2 J_{2(\ldots)} + 2, \ldots \right| 2\alpha$

$2\alpha (x_{ij-1k} - \ldots) = |$

$2\alpha (\ldots) = |$

$c^2 m = 6\alpha$

$\frac{c^2 m}{6} = \alpha \qquad c^2 = \frac{6\alpha}{m}$

w takim razie $a_{ijk} = x_{ijk}(0) \Big|_{i+j+k=0}$!

= wartości przemieszczenia w płaszczyźnie $i+j+k=0$

+++
++−
+−+
+−−
−++
−+−
−−+
−−−

także $J_{2(i+j-k)} \quad J_{2(i-j-k)}$

jeśli zatem przyjmiemy $x_{ijk} = a \left[ J_{2(i+j+k)} + J_{2(i+j-k)} + J_{2(i-j+k)} \right]$

to za czasu $t=0$ musi być wszędzie $=0$ z wyjątkiem

$\left.\begin{array}{l} i+j+k=0 \\ i+j-k=0 \\ i-j+k=0 \end{array}\right\} \quad i=j=k=0$

Network

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 (\Delta_h^2 w + \Delta_k^2 w)$$

$$-p^2 = c^2\left[(e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi}) + (e^{2i\psi} - 2 + e^{-2i\psi})\right]$$

$$= 2c^2\left[(\cos 2\varphi - 1) + (\cos 2\psi - 1)\right] = -4c^2\left[\sin^2\varphi + \sin^2\psi\right]$$

$$w = \sum \left[e^{2ik\varphi}\left(A e^{2ih\psi} + B e^{-2ih\psi}\right) + e^{-2ik\varphi}\left(A' e^{2ih\psi} + B' e^{-2ih\psi}\right)\right] \cos pt$$

$$M \cos 2k\varphi + N \sin 2k\varphi$$

$$A e^{2i(k+h)\varphi} + B e^{2i(h-k)\varphi}$$

$$R\, e^{2i(k+h+\varepsilon)\varphi} + e^{2i(h-k+\varepsilon)\varphi}$$

$$= \sum_{kh} \left[\begin{array}{l} A \cos 2(k+h)\varphi + B \sin 2(k+h)\varphi \\ + C \cos 2(k-h)\varphi + D \sin 2(k-h)\varphi \end{array}\right] \cos pt$$

$$p = 2c\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}$$

$$w = \sum_{kh} \left[A_{kh} \cos(2k\varphi + 2h\psi) + B_{kh} \sin(2k\varphi + 2h\psi) + C_{kh} \cos(2k\varphi - 2h\psi) + D_{kh} \sin(2k\varphi - 2h\psi)\right] \cos\left[2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right]$$

$$w = \int \Phi(\varphi, \psi) \, \underset{(\cos)}{\sin} 2k\varphi \, \underset{(\cos)}{\sin} 2h\psi \, \cos\left(2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right) d\varphi\, d\psi$$

lub też $w = \int \Phi(\varphi, \psi) \sin 2(k\varphi + h\psi) \cos\left(2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right) d\varphi\, d\psi$

zaczem $t = 0$:

$$w_{kh} = \int \Phi(\varphi, \psi) \sin 2(k\varphi + h\psi)\, d\varphi\, d\psi$$

biorąc błędy cos.

$$w = \int \Phi(\varphi, \psi) \cos 2(k\varphi + h\psi) \cos\left(2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right) d\varphi\, d\psi$$

w razie membrany ciągłej:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$w = f(x, y) \sin ct$$

$$= J_0(\sqrt{x^2 + y^2}) \sin ct$$

w trzech wymiarach:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

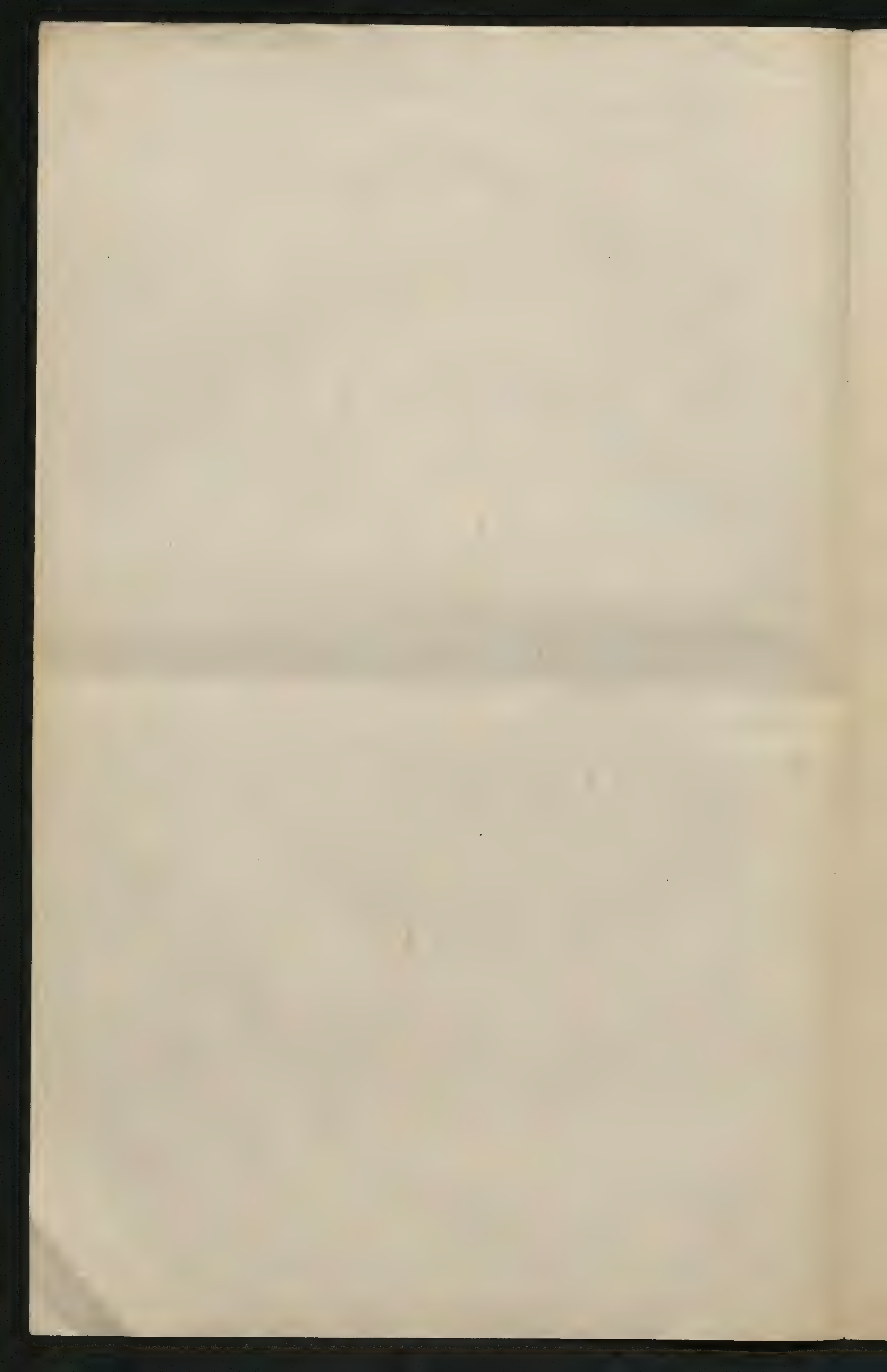
$$w = \sin ct \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}$$

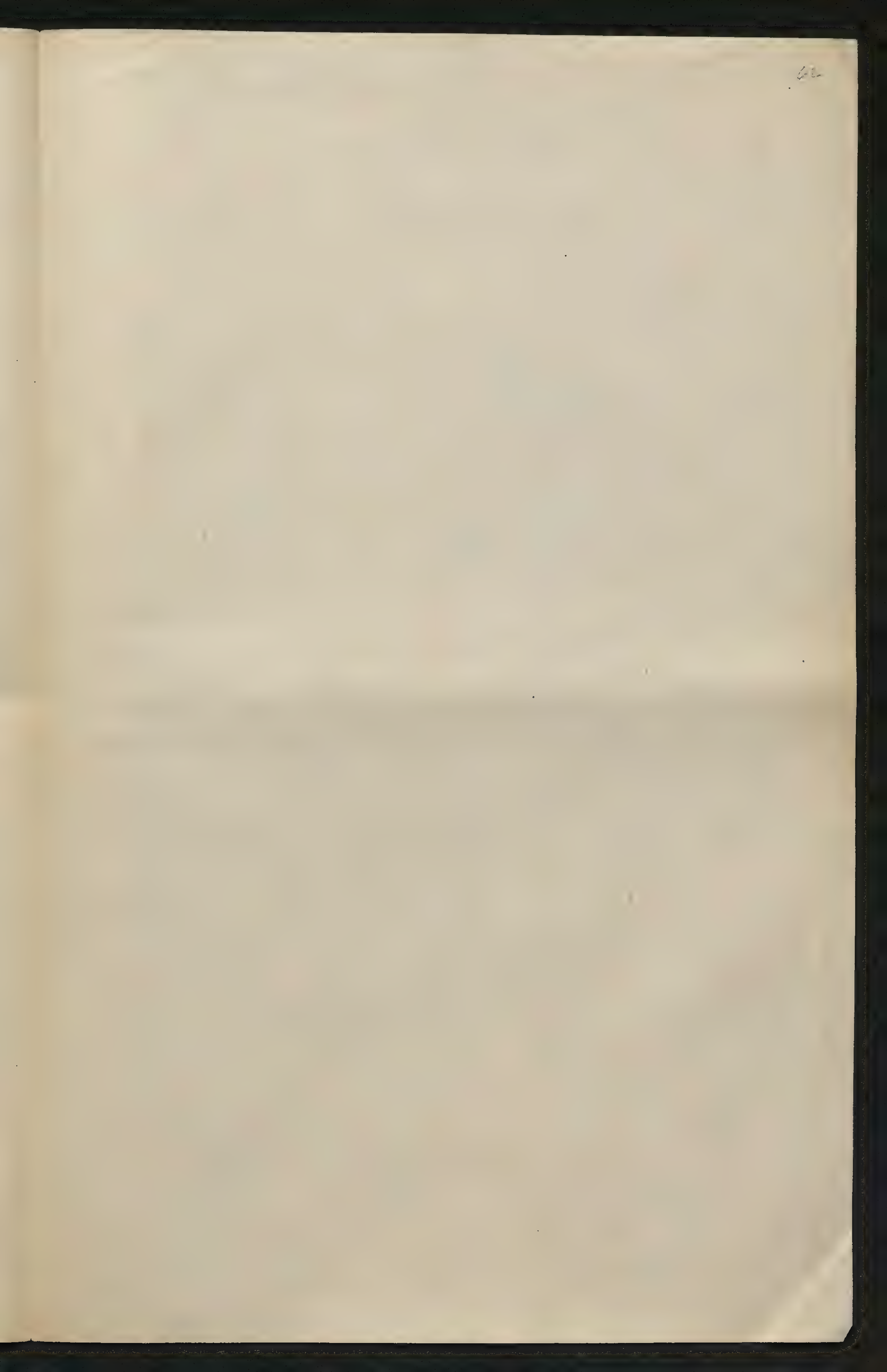
$$\frac{\partial J_0}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{\ }} J_0'$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} J_0'' + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_0' - \frac{x^2}{\sqrt{\ }^3} J_0'$$

$J_0'$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) J = J_0'' + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_0' = J_0''(2) + \frac{1}{2} J_0' = J_0'' - \frac{J_1}{2} = -J_1' - \frac{(J_0 + J_2)}{2} = -J_0$$





Jeśli w całości n wolnych punktów (n parzyste)

$$A_1 = (y_1) \sin\frac{\pi}{n+1} + (y_2)\sin\frac{2\pi}{n+1} + \dots \; (y_{\frac{n}{2}}) \sin\frac{n\pi}{2(n+1)} +$$

$$A_2 = (y_1) \sin\frac{2\pi}{n+1}$$

$$A_3 = \dots$$

$$A_{\frac{n}{2}} = (y_1)\sin\frac{n\pi}{2(n+1)} + (y_2)\sin\frac{2n\pi}{2(n+1)} + \dots \; (y_{\frac{n}{2}})\sin\left[\frac{n\frac{n}{2}\pi}{2(n+1)}\right]^2$$

~~$A_{\frac{n+1}{2}} = (y_1)\sin\frac{(n+1)\pi}{2(n+1)}$~~

$$A_{\frac{n}{2}+1} = (y_1)\sin\frac{(\frac{n}{2}+1)\pi}{n+1} + (y_2)\sin\frac{2(\frac{n}{2}+1)\pi}{n+1} + \dots \; y_{\frac{n}{2}} \sin\frac{(\frac{n}{2}+1)n\pi}{2(n+1)}$$

$$= \cos\frac{\pi}{n+1} \qquad \sin$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$$A_{\frac{n}{2}+1} = (y_1)\cos\frac{n\pi}{2(n+1)} - (y_2)\sin\frac{2n\pi}{2(n+1)} + \dots$$

$$+ \qquad -$$

$$(y_k) = A_1 \sin\frac{k\pi}{n+1} + A_2 \sin\frac{2k\pi}{n+1} + \dots$$

$$\sin\frac{kn\pi}{2(n+1)} = \sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sin\frac{k\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sin\frac{k(n+2)\pi}{2(n+1)} = \sin\left(\frac{kn\pi}{2(n+1)} + \frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$\sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \sin\frac{k\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$=$$

$$A_{\frac{n}{2}+m} = (y_1)\sin\left(\frac{n}{2} - m - 1\right)\frac{\pi}{2(n+1)} - (y_2)\sin\left(\frac{n}{2} - m - 1\right)\frac{2\pi}{2(n+1)} +$$

$$= A_1 \left[\sin\mu \sin\nu - \sin 2\mu \sin 2\nu + \sin 3\mu \sin 3\nu - \quad\right]$$

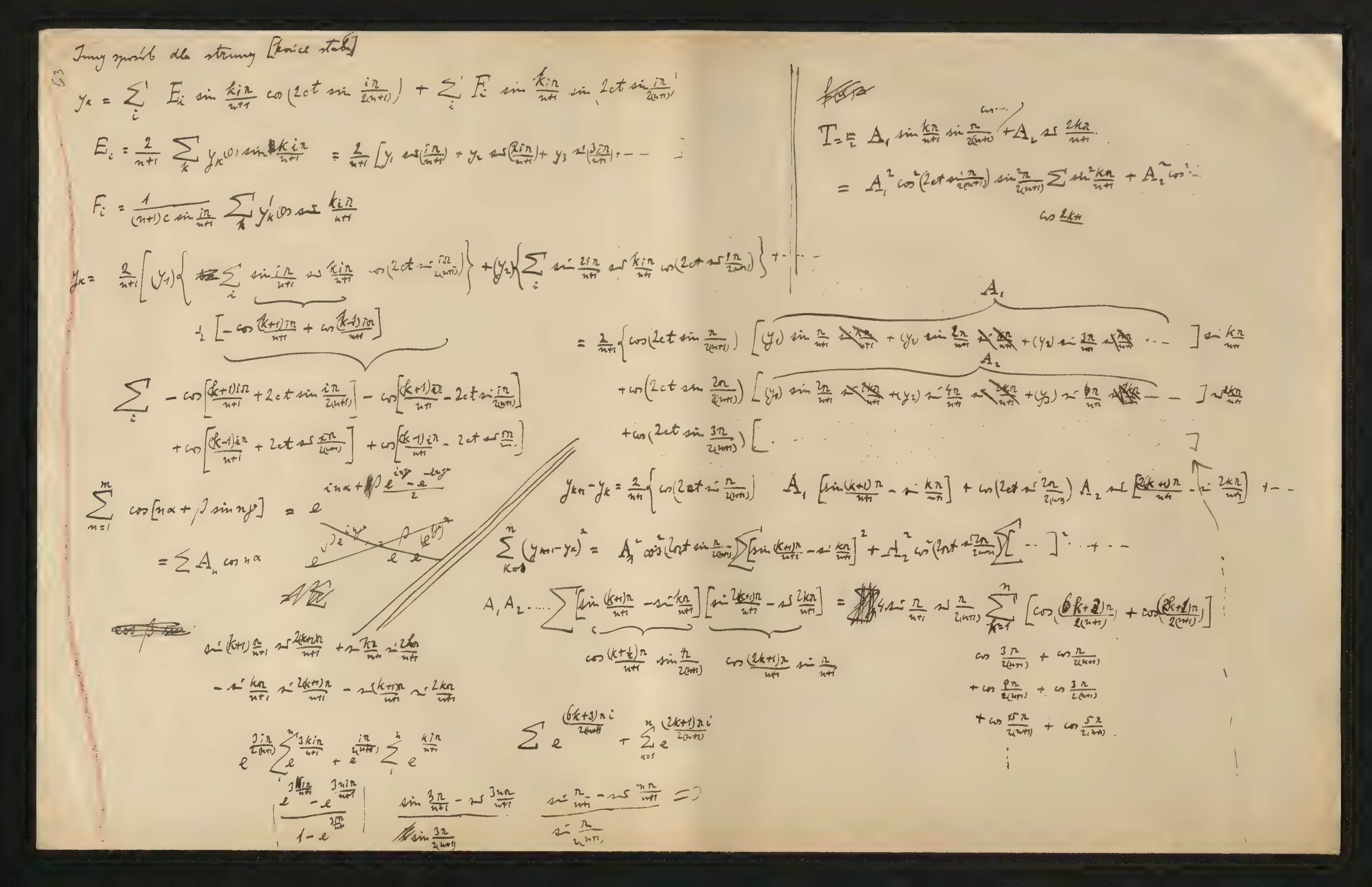
$$\cos(\mu+\nu) - \cos(\mu-\nu)$$

jeśli warunek $t = 0$: $\quad \pi k\ell = \int \Phi(\varphi,\psi) \cos(k\varphi + \ell\psi)\, d\varphi\, d\psi$

jeśli funkcja $\Phi(\varphi,\psi) = 0$ dla wszystkich ... $\varphi,\psi$, tylko $\Phi \geq 0$ dla $\varphi,\psi$ ...

$$\pi k\ell = \iint \Phi(\varphi,\psi)\, d\varphi\, d\psi$$

ogólnie zatem $\quad \pi = \sum$



Inny sposób dla struny [koniec stały]

$$y_k = \sum_i' E_i \sin\frac{ki\pi}{n+1}\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right) + \sum_i' F_i \sin\frac{ki\pi}{n+1}\sin\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$E_i = \frac{2}{n+1}\sum_k y_k(0)\sin\frac{ki\pi}{n+1} = \frac{2}{n+1}\left[y_1\sin\frac{i\pi}{n+1} + y_2\sin\frac{2i\pi}{n+1} + y_3\sin\frac{3i\pi}{n+1} + \dots\right]$$

$$F_i = \frac{1}{(n+1)c\sin\frac{i\pi}{n+1}}\sum_k y_k'(0)\sin\frac{ki\pi}{n+1}$$

$$y_k = \frac{2}{n+1}\left[(y_1)\left\{\sum_i \sin\frac{i\pi}{n+1}\sin\frac{ki\pi}{n+1}\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)\right\} + (y_2)\left\{\sum_i \sin\frac{2i\pi}{n+1}\sin\frac{ki\pi}{n+1}\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)\right\} + \dots\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[-\cos\frac{(k+1)i\pi}{n+1} + \cos\frac{(k-1)i\pi}{n+1}\right]$$

$$T = \frac{m}{2}\, A_1 \sin\frac{k\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{2(n+1)} + A_2 \sin\frac{2k\pi}{n+1}$$

$$= A_1^2\cos^2\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\sum\sin^2\frac{k\pi}{n+1} + A_2^2\cos^2\dots$$

$$= \frac{2}{n+1}\left\{\cos\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\left[(y_1)\sin\frac{\pi}{n+1} + (y_2)\sin\frac{2\pi}{n+1} + (y_3)\sin\frac{3\pi}{n+1}\dots\right]\sin\frac{k\pi}{n+1}\right.$$

$$+\cos\left(2ct\sin\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)\left[(y_1)\sin\frac{2\pi}{n+1} + (y_2)\sin\frac{4\pi}{n+1} + (y_3)\sin\frac{6\pi}{n+1}\dots\right]\sin\frac{2k\pi}{n+1}$$

$$+\cos\left(2ct\sin\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)\left[\dots\right]$$

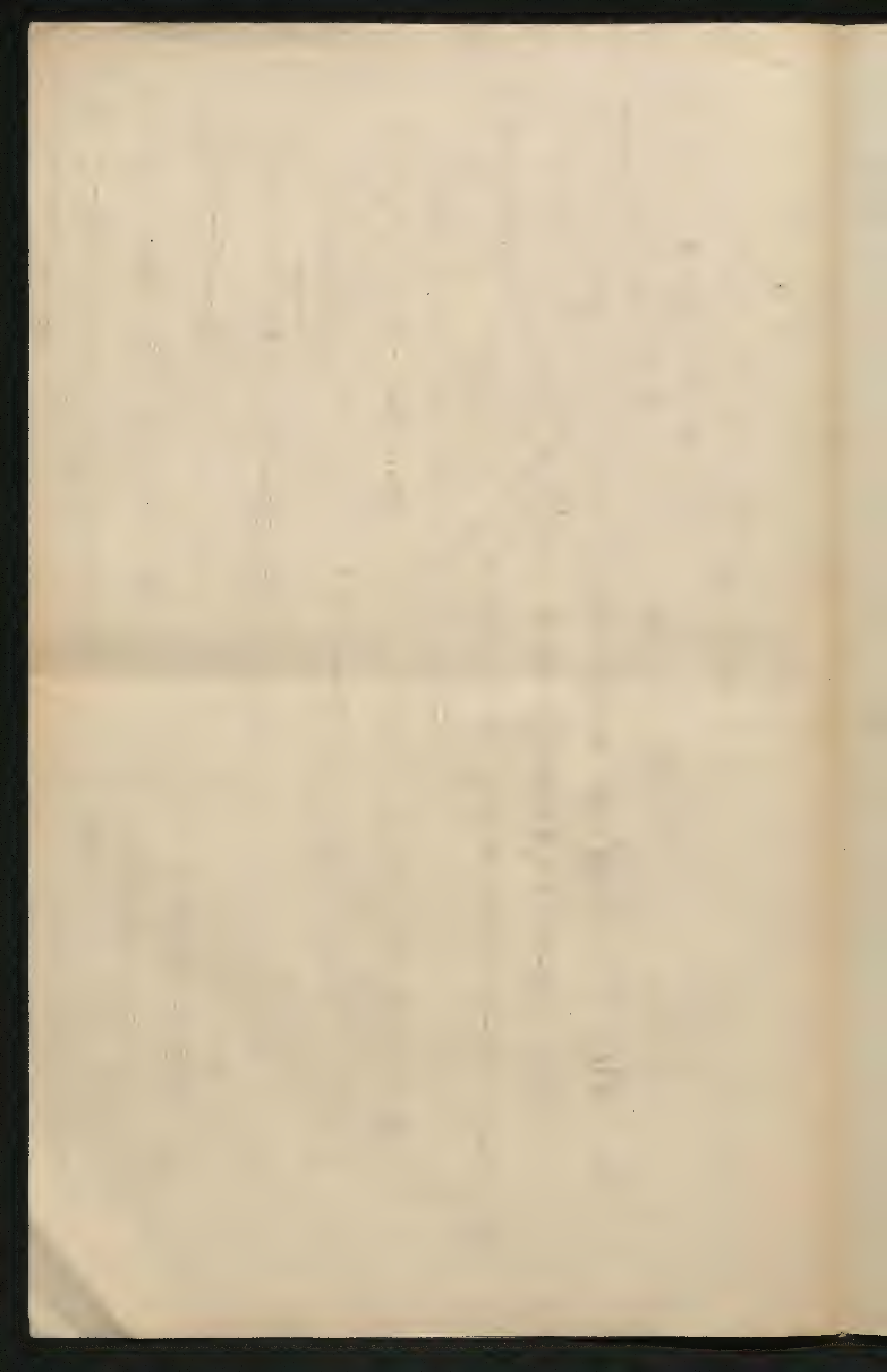
$$\sum_{n=1}^{m}\cos[n\alpha + \beta\sin n\gamma] = \sum A_n\cos n\alpha$$

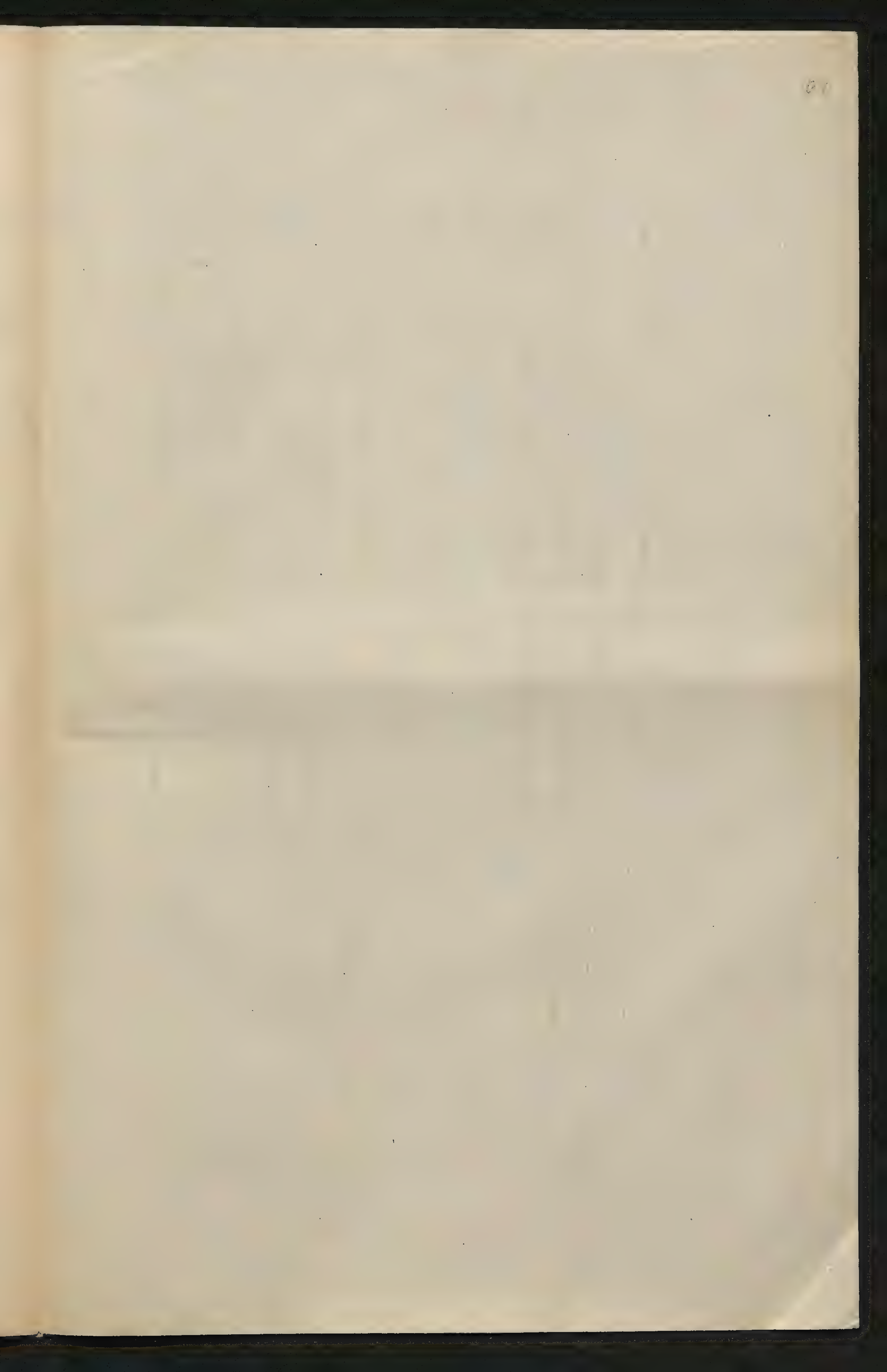
$$y_{k+1} - y_k = \frac{2}{n+1}\left\{\cos\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)A_1\left[\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right] + \cos\left(2ct\sin\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)A_2\left[\sin\frac{2(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{2k\pi}{n+1}\right] + \dots\right.$$

$$\sum_{k=0}^{n}(y_{k+1}-y_k)^2 = A_1^2\cos^2\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\sum\left[\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right]^2 + A_2^2\cos^2\left(2ct\sin\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)\sum\left[\dots\right]^2 + \dots$$

$$A_1A_2\dots\sum\left[\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right]\left[\sin\frac{2(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{2k\pi}{n+1}\right] = 4\sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{(6k+3)\pi}{2(n+1)} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right]$$

$$\sum e^{\frac{(6k+3)\pi i}{2(n+1)}} + \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2(n+1)}}$$





$$y_K = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^{n} A_i \sin\frac{k\pi i}{n+1} \cos\left(2ct \sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)$$

$\frac{i\pi}{2(n+1)} = \omega$

$\sin\frac{k\pi i}{n+1}$ lim dla $n=\infty$ $= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\omega) \sin 2k\omega \cos(2ct \sin\omega)\, d\omega$

Istotnie: $\Delta^2 y_K = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\omega) \left[\sin 2(k-1)\omega + \sin 2(k+1)\omega - 2\sin 2k\omega\right] \cos(2ct \sin\omega)\, d\omega$

$2\sin 2k\omega \cos 2\omega -$

$-4\sin 2k\omega \sin^2\omega$

$\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\omega) \sin^2\omega \sin 2k\omega \cos(2ct\ldots) -$ stimmt!

Wystarczy zatem rozpatrzeć jedno drganie normalne, ponieważ naogół $\delta = \Sigma$ . . .

~~$y_K = \frac{2}{n+1} A_i \sin\frac{k\pi i}{n+1} \cos\left(2ct \sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)$~~

$$(y_{K+1} - y_K)\, \dot y_K = \frac{4}{(n+1)^2}\left[\sum_1^n A_i \left(\sin\frac{(k+1)i\pi}{n+1} - \sin\frac{ki\pi}{n+1}\right) \cos\left(2ct \sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right) \sum_{i=1}^{n} A_i \sin\frac{i\pi}{2(n+1)} \cos\frac{ki\pi}{n+1} \cos\left(2ct \sin\frac{\pi i}{2(n+1)}\right)\right]$$

ujyść początkowo wszystkie $\dot y_K = 0$ dla $K$ od 0 do $\frac{n+1}{2}$; strunę od $\frac{n+1}{2}$ do $n$ uważać jako osobny szereg z odpowiednimi $A$ które nazwiemy $\alpha$ — tym szeregu $\alpha$ = drgania normalne i na każde z nich przypada jednakowe prawdopodob. $W \infty e^{-\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots}$ $[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \ldots]$.

następnie wyrazić $A$ przez owe $\alpha$ (liniowo) podstawić w powyższe ~~[illegible]~~ wzór i zatrzymać wyrazy $\alpha_0^2\, \alpha_1^2 \ldots$ które wszystkie równe

$$y_K = \sum_k A_k \cos 2k\varphi\ \cos(2ct \sin\varphi) + \Sigma D_k \sin 2k\varphi \ldots$$

$\varphi(\omega)$ = dowolna funkcya $\omega$

rozwijając $\varphi(\omega)$ w szereg Fouriera $\varphi(\omega) = \Sigma A \sin m\omega$

zamieniamy to w szereg funkcyi $J(2ct)$

Dla czasu $t=0$:

$$y_K(0) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\omega) \sin 2k\omega\, d\omega$$

więc $y_K^{(0)}$ są spółczynnikami w szeregu Fouriera dla $\varphi$! to trzymać

$$m\ddot{x}_{ijk} = 2\alpha\left[\Delta_i^2 x + \Delta_j^2 x + \Delta_k^2 x\right]$$

$$V = \sum\Big[(x_{ijk} - x_{i-1\,jk})^2 + (x_{ijk} - x_{ij-1\,k})^2 + (x_{ijk} - x_{ijk-1})^2$$
$$+ (y_{ijk} - y_{i-1\,jk})^2 + (\quad)$$
$$+ (z_{ijk} - z_{i-1\,jk})^2 + \underbrace{\quad}_{\text{nie są odrębne niezależne}}\Big]$$

$$T = \sum \frac{m}{2}\left[\dot{x}_{ijk}^2 + \dot{y}_{ijk}^2 + \dot{z}_{ijk}^2\right]$$

$$mc^2 = 6\alpha \qquad c = \sqrt{\frac{6\alpha}{m}}$$

Przyjmijmy: $x_{ijk} = \sum x_{\alpha\beta\gamma}\, J_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]}(2ct)$

to sprawdzi [illegible] dla $i, j \to \infty$ ... ale dla bardzo dużego ciała w którym wszystkie punkty równo uporządkowane błąd [illegible] w porównaniu z [illegible]

Przenoszenie energii w kierunku $X$:
(dla każdego punktu przekroju:)

$$(x_{0jk} - x_{1jk})\,\dot{x}_{0jk}$$

ponieważ wszystkie punkty równo uporządkowane, wystarczy wziąć punkt $j = k = 0$

$$(x_{000} - x_{100})\,\dot{x}_{000}$$

$$x_{000} = \sum_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha\beta\gamma}\, J_{2[\alpha+\beta+\gamma]}(2ct) \qquad \dot{x}_{000} = 2c\sum x_{\alpha\beta\gamma}\, J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)}(2ct) = 2c\sum x_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1} - J_{2(\alpha+\beta+\gamma)+1}\right]$$

$$x_{100} = \sum x_{\alpha\beta\gamma}\, J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-2} \qquad = 2c\sum(x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha-1\,\beta\gamma})\, J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}$$

$$x_{000} - x_{100} = \sum x_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(\alpha+\beta+\gamma)} - J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-2}\right]$$

$$= \sum \underbrace{(x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha-1\,\beta\gamma})}\, J_{2(\alpha+\beta+\gamma)} = \sum \underbrace{(x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha\beta-1\,\gamma})}\, J_{2(\alpha+\beta+\gamma)} = \ldots$$

ponieważ nie są niezależne, nie można tak całkować jak poprzednio dla [illegible], uważając $x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha-1\,\beta\gamma}$ jako niezal. zmienne

| | | $\alpha$ | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 001 | 010 | 100 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 6 | 002 | 020 | 200 | 011 | 101 | 110 | | | | | | | | | |
| 3 | 10 | 003 | 030 | 300 | 111 | 102 | 012 | 021 | 120 | 201 | 210 | | | | | |
| 4 | 15 | 004 | 040 | 400 | 112 | 121 | 211 | 202 | 220 | 022 | 103 | 301 | 130 | 310 | 013 | 031 |
| 5 | 18 | 005 | 050 | 500 | 113 | 131 | 311 | 401 | 410 | 140 | 041 | 104 | 014 | 203 | 302 | 230 | 320 | 023 | 032 |
| $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $n$ | | $n00$ | $0n0$ | $00n$ | | | | | | | | | | | | |

1+0+0

1+1+0   2+0+0

1+1+1   2+0+1   3+0+0

112   131   220   40

500   4+1   3+2   3+1+1

6+0   5+1   4+2   4+1+1   3+2+1   3+3+0

$V_{(0)} =$ ~~...~~

$$\alpha \sum_i\sum_j\sum_k \left\{ \left[ \sum_{\beta\gamma}\sum a_{i\beta\gamma} - \sum_{\beta\gamma}\sum a_{i-1\,\beta\gamma} \right]^2 + \left[\sum\sum - \;\right]^2 + \left[\;\;\right] \right\} = \alpha \left\{ \sum_i (A_i - A_{i-1})^2 + \sum_j (B_j - \;)^2 + \sum_k (C_k \;)^2 \right.$$

$+ 2\,\alpha$

$$T = \frac{m}{2}\, 4c^2 \sum\sum\sum \left\{ \left[ \sum_{\beta\gamma}\sum u_{i\beta\gamma} + \sum\sum u_{\alpha j\gamma} + \sum\sum u_{\alpha\beta k} \right]^2 + \left[ u \;\; \right]^2 + \left[ \;\; \right] \right\}$$

$\sum_{\beta\gamma} a_{i\beta\gamma} = A_i$

$$(x_{ijk} - x_{ij-1\,k})\,\dot{x}_{ijk} =$$

$$= \sum a_{\alpha\beta\gamma} \left[ J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2} \right] \cdot 2c \sum_{\alpha\beta\gamma} \left[ A_\alpha J'_{2(i-\alpha)} + B_\beta J'_{2(j-\beta)} + C_\gamma J'_{2(k-\gamma)} \right]$$

$$= 2c \sum_\alpha A_\alpha \underbrace{\left[ J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2} \right]}_{-J'_{2(i-\alpha)-1}} \cdot \left\{ \sum_\alpha A_\alpha J'_{2(i-\alpha)} + \alpha \sum_\beta B_\beta J'_{2(j-\beta)} + \alpha \sum_\gamma C_\gamma J'_{2(k-\gamma)} \right\}$$

bydzie to same co z Periodem

---

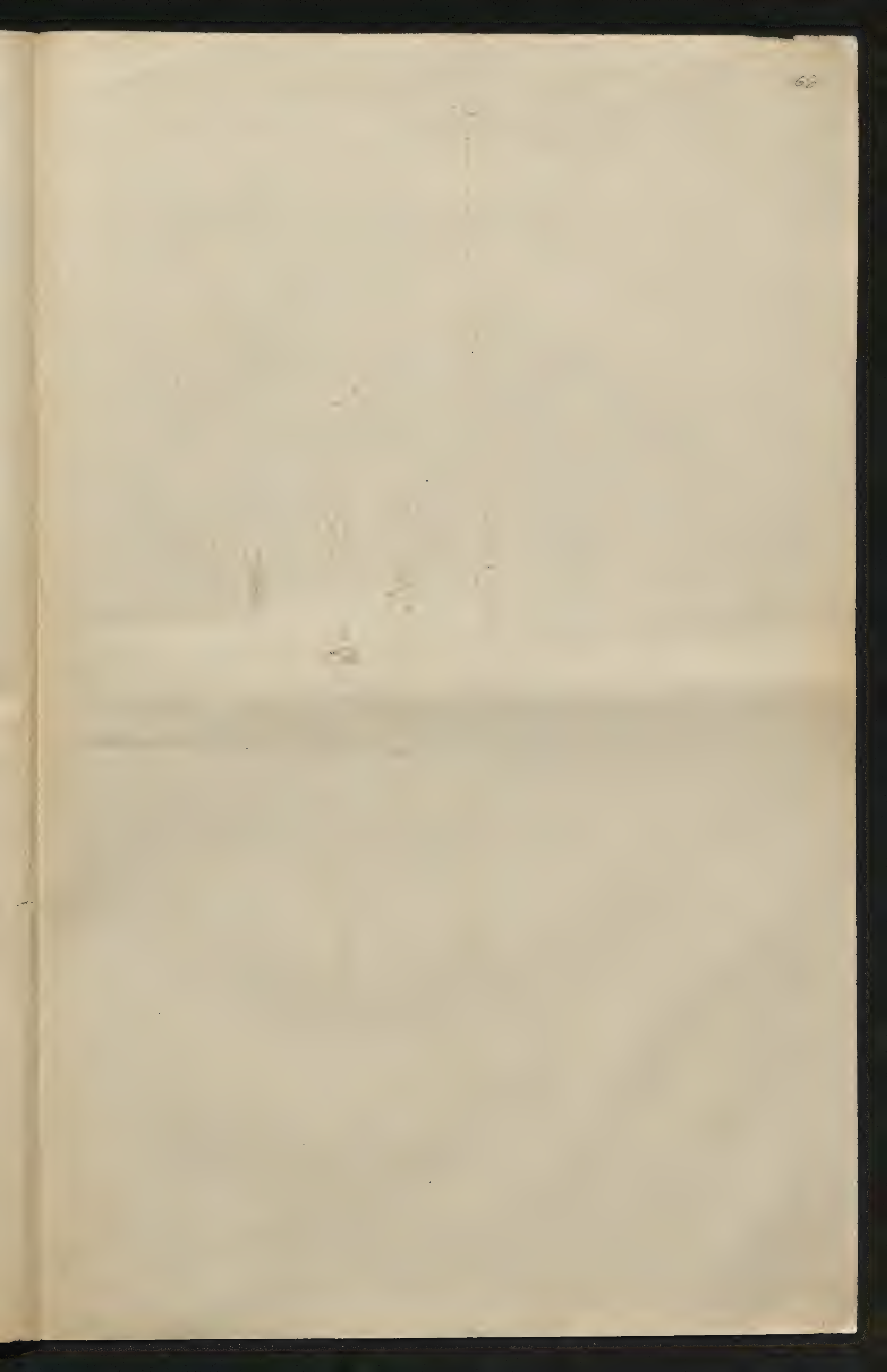
Próba:

$$x_{ijk} = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\, J_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]} + \sum_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta\gamma} \int J_{\dots}\, dt$$

$$V = \alpha \sum_{ijk} \Big[ \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \big( \underbrace{J_{2(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)} - J_{2\,\dots\,-2}}_{J'_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]-1}} \big) \Big]^2 +$$

$V(0) = \alpha \sum$

$$(x_{ijk} - x_{ij-1\,k})\,\dot{x}_{ijk} = \Big[ \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\, J'_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]-1} \Big] \Big[ \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\, J'_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]} \Big]$$



$(n-1)\,0\,1$   $0\,(n-1)\,1$   $0\,1\,(n-1)$   $(n-1)\,1\,0$   $1\,0\,(n-1)$   $1\,(n-1)\,0$

$(n-2)\,0\,2$   $0\,(n-2)\,2$   $0\,2\,(n-2)$   $(n-2)\,2\,0$   $2\,0\,(n-2)$   $2\,(n-2)\,0$

$(n-2)\,1\,1$   $1\,(n-2)\,1$   $(n-2)\,1\,1$

$(n-3)\,0\,3$ . . .

$n = \alpha+\beta+\gamma$   $\alpha\beta\gamma$   $\alpha\gamma\beta$   $\beta\gamma\alpha$   $\beta\alpha\gamma$   ~~$\alpha\beta\gamma$ $\alpha\gamma\beta$~~

w jaki sposób da się podzielić liczba n jedności na 3 grupy

$$\sum^{n} (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$2\nu J_\nu = x(J_{\nu-1} + J_{\nu+1})$$

$$S = J_1^2 + 3^3 J_3^2 + 5^3 J_5^2 + \dots = \frac{x}{2}\{ J_1 J_0 + J_1 J_2 + 3^2 J_3 (J_2 + J_4) + 5^2 J_5 (J_4 + J_6) +$$

$$= \frac{x^2}{4}\{ (J_0 + J_2)^2 + 3(J_2 + J_4)^2 + 5(J_4 + J_6)^2 + \dots$$

Czy można twierdzić że $\overline{(x_{000} - x_{100})\,\dot{x}_{000}} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \left[ J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1} \cdot J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)} \right] \cdot \overline{x^2_{\alpha\beta\gamma}}$ ?

Tylko w razie jeśli $\overline{x_1 x_2} = 0$ etc. co nie jest potrzebne

4 1 1   3 2 1   3 1 2

2 1 3   2 2 2   2 3 1

1 1 4   1 2 3   1 3 2   1 4 1

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} +$$

Ogólnie mamy zatem:

$$\dot{y}_0(t) = \left[y_0 J_0 + (\dot{y}_1 + \dot{y}_{-1}) J_2 + (\dot{y}_2 + \dot{y}_{-2}) J_4 + \dots\right] + c\left[\begin{matrix}(y_1 - y_0) J_1 + (y_2 - y_1) J_3 + (y_3 - y_2) J_5 + \dots \\ + (y_0 - y_{-1}) J_{-1} + (y_{-1} - y_{-2}) J_3 + (y_{-2} - y_{-3}) J_{-5} + \end{matrix}\right]$$

punkt 0 początkowo nieruchomy

Teraz przyjąć prawdopod. różne od $-\infty$ do 0 i od 1 do $+\infty$

$$W_{(y_0 y_1 \dots y_{-1} \dots)} = A e^{-\gamma \frac{m}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dots) - \gamma\alpha[(y_0-y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \dots] - \Gamma\frac{m}{2}[\dot{y}_0^2 + \dot{y}_{-1} + \dot{y}_{-2} + \dots] - \Gamma\alpha[(y_0 - y_1)^2 + (y_{-1} - y_0)^2 + \dots]}$$

Albo zupełnie inaczej wygląda na sznur od $-\infty$ do 0 tylko prawdop. układu $y_1 y_2 \dots y_\infty = A e^{-\gamma\frac{m}{2}(\dot{y}_1^2 + \dots) - \gamma\alpha(y_1 - y_2)^2 + \dots}$

gdzie wszystkie początkowe $y_0 y_{-1} \dots y_{-\infty}$ przyjmujemy $= 0$

$$\frac{m\dot{y}^2}{2}(t) = \frac{1}{2\gamma}\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \dots\right] = \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{1 - J_0^2}{2}\right] \neq \frac{1}{4\gamma}$$

praca wykonana po sek.: $= 2\alpha\,\dot{y}_0(y_1 - y_0)$

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 = {} & y_1 J_0 + y_2 J_2 + y_3 J_4 \dots \\ & + y_0 J_{-2} + y_{-1} J_{-4} \dots \\ & - y_0 J_0 - y_1 J_2 - y_2 J_4 \dots \\ & - y_{-1} J_{-2} - y_{-2} J_4 \dots \end{aligned}$$

$$= (y_1 - y_0) J_0 + (y_2 - y_1) J_2 + (y_3 - y_2) J_4 \dots + (y_0 - y_{-1}) J_{-2} + (y_{-1} - y_{-2}) J_4 \dots$$

$$\left\{ + \dot{y}_0 \int (J_2 - J_0)\,dt + \dot{y}_1 \int (J_0 - J_2) + \dot{y}_2 \int (J_2 - J_4)\,dt + (\dot{y}_{-1}) \int (J_4 - J_2) \dots \right\}$$

(with $2J_1'$, $2J_1'$, $2J_3'$, $2J_3'$ written above the integrals)

$$+ \frac{1}{c}\left\{\begin{matrix}\dot{y}_1 J_1 + \dot{y}_2 J_3 + \dot{y}_3 J_5 + \dots \\ + \dot{y}_0 J_{-1} + \dot{y}_{-1} J_{-3} + \dot{y}_{-2} J_{-5} + \dots\end{matrix}\right\}$$

Zatem ~~wszystkie~~ tak jak dawniej równowaga początkowej temperatury od $-\infty$ do $+\infty$ wprowadza $(y_1 - y_0)(y_2 - y_1)$ etc. jako nowe zmienne

$$\overline{\dot{y}_0(t)(y_1 - y_0)} = \frac{1}{c}\left\{\left[\begin{matrix}J_0 J_{-1} + J_2 J_4 + J_4 J_3 + \dots \\ + J_2 J_{-3} + J_{-4} J_5 + \dots\end{matrix}\right] + A\left[\begin{matrix}J_0 J_1 + J_2 J_3 + \dots \\ + J_2 J_{-1} + J_{-4} J_{-3} \dots\end{matrix}\right]\right\} = 0$$

jeśli $A$: $+ (J_1 - J_{-1})(J_2 - J_0) + (J_{-3} - J_{-1})(J_4 - J_2) + \dots$

$= (J_1 - J_3)(J_0 - J_2) + (J_3 - J_5)(J_2 - J_4) + \dots$

$= J_2 J_1' + J_4' J_3' + \dots$

nie można twierdzić żeby było: $\overline{y_1 y_0} = 0$, $\overline{y_1 y_2} = 0$ etc.

$(n-1)01$ $0(n-1)1$ $01(n-1)$ $(n-1)10$ $10(n-1)$ $1(n-1)0$

$(n-2)02$ $0(n-2)2$ $02(n-2)$ $(n-2)20$ $20(n-2)$ $2(n-2)0$

$(n-2)11$ $1(n-2)1$ $(n-2)11$

$(n-3)03$ . –

$n=\alpha+\beta+\gamma$ $\alpha\beta\gamma$ $\alpha\gamma\beta$ $\beta\gamma\alpha$ $\beta\alpha\gamma$ ~~$\alpha\beta\gamma$~~ ~~$\alpha\gamma\beta$~~

w jaki sposób da się podzielić liczba n jedności na 3 grupy

4 1 1 1 3 2 1 3 1 2

2 1 3 2 2 2 2 3 1 1

1 1 4 1 2 3 1 3 2 1 4 1

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}+$$

$$\sum^{n}(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$2\nu J_\nu = x(J_{\nu-1}+J_{\nu+1})$$

$$\int = J_1^2+3^2J_3^2+5^2J_5^2+\dots = \frac{x}{2\nu}\left\{J_1J_0+J_1J_2+3^2J_3(J_2+J_4)+5^2J_5(J_4+J_6)+\right.$$

$$=\frac{x^2}{4}\left\{(J_0+J_1)^2+3(J_2+J_4)^2+5(J_4+J_6)^2+\dots\right.$$

Czy można twierdzić że $\overline{(x_{000}-x_{100})\dot{x}_{000}}=\sum_{\alpha\beta\gamma}\left[J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}\cdot J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)}\right]\cdot\overline{x^2_{\alpha\beta\gamma}}$ ? Tylko w razie jeśli $\overline{x_1x_2}=0$ etc. co nie jest potrzebne

Ogólnie mamy zatem:

$$\dot y_0(t) = \left[y_0 J_0 + (\dot y_1 + \dot y_{-1}) J_2 + (\dot y_2 + \dot y_{-2}) J_4 + \cdots \right] + c\left[\begin{matrix}(y_1-y_0)J_1 + (y_2-y_1)J_3 + (y_3-y_2)J_5 + \\ + (y_0-y_{-1})J_{-1} + (y_{-1}-y_{-2})J_{-3} + (y_{-2}-y_{-3})J_{-5} + \end{matrix}\right]$$

punkt 0 początkowo nieruchomy

Teraz przyjąć prawdopod. różne od $-\infty$ do 0 i od 1 do $+\infty$

$$W_{(y_0 y_1 \ldots y_{-1} \ldots)} = A e^{-\gamma \frac{m}{2}(\dot y_1 + \dot y_2 + \cdots) - \gamma\alpha\left[(y_1-y_2)^2 + (y_2-y_3)^2 + \cdots\right] - \Gamma\frac{m}{2}\left[\dot y_0^2 + \dot y_{-1} + \dot y_{-2} + \cdots\right] - \Gamma\alpha\left[(y_0-y_1)^2 + (y_{-1}-y_0)^2 + \cdots\right]}$$

$(y_0-y_1)^2+$

Albo zupełnie bez względu na części od $-\infty$ do 0 tylko prawdop. układu $y_1\, y_2 \cdots y_\infty$ $= A\, e^{-\gamma\frac{m}{2}(\dot y_1^2 + \cdots) - \gamma\alpha(y_1-y_2)^2 + \cdots)}$

gdzie wszystkie początkowe $y_0\, y_{-1} \cdots y_{-\infty}$ przyjmujemy $=0$

$$\frac{m\dot y^2}{2}\ \text{bo}= \frac{1}{2\gamma}\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \cdots\right] = \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{1-J_0^2}{2}\right] \quad \neq \frac{1}{4\gamma}$$

praca wykonana $= 2\alpha\, \dot y_0 (y_1 - y_0)$
na sek:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 = {} & y_1 J_0 + y_2 J_2 + y_3 J_4 - \\ & + y_0 J_{-2} + y_{-1} J_{-4} \cdots \\ & - y_0 J_0 - y_1 J_2 - y_2 J_4 - \\ & - y_{-1} J_{-2} - y_{-2} J_{-4} - \end{aligned} \quad = (y_1-y_0)J_0 + (y_2-y_1)J_2 + (y_3-y_2)J_4 - \cdots + (y_0-y_{-1})J_{-2} + (y_{-1}-y_{-2})J_{-4} \cdots$$

$$+ \dot y_0 \int (J_2 - J_0)\,dt + \dot y_1 \int (J_0 - J_2) + \dot y_2 \int (J_2 - J_4)\,dt + (\dot y_{-1}) \int (J_4 - J_2) \cdots$$

($2J_1'$, $2J_1'$, $2J_3'$, $2J_3'$)

$$+ \frac{1}{c}\left\{\begin{matrix}\dot y_1 J_1 + \dot y_2 J_3 + \dot y_3 J_5 + \cdots \\ + \dot y_0 J_{-1} + \dot y_{-1} J_{-3} + \dot y_{-2} J_{-5} + \cdots\end{matrix}\right\}$$

Jeżeli ~~wszystkie~~ tak jak dotychczas równowaga początkowej temperatury od $-\infty$ do $+\infty$
wprowadza $(y_1-y_0)(y_2-y_1)$ etc. jako nowe zmienne

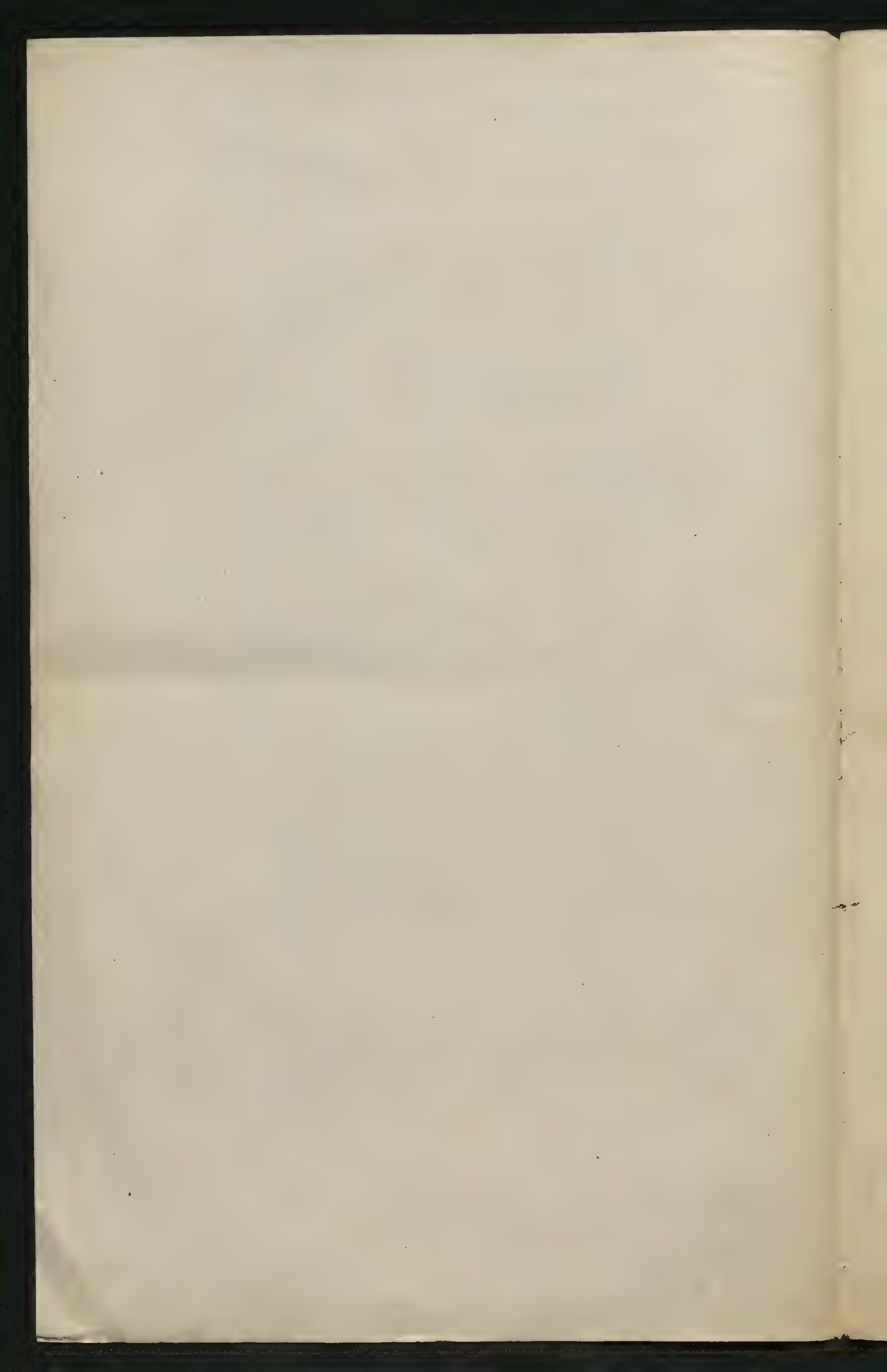
$$\overline{\dot y_0(t)(y_1-y_0)} = \frac{1}{c}\left\{\left[\begin{matrix}J_0 J_{-1} + J_2 J_4 + J_4 J_3 + \\ + J_2 J_3 + J_{-4} J_5 + \cdots\end{matrix}\right] + A\left[\begin{matrix}J_0 J_1 + J_2 J_3 + \cdots \\ + J_2 J_{-1} + J_{-4} J_{-3} \cdots\end{matrix}\right]\right\} = 0.$$

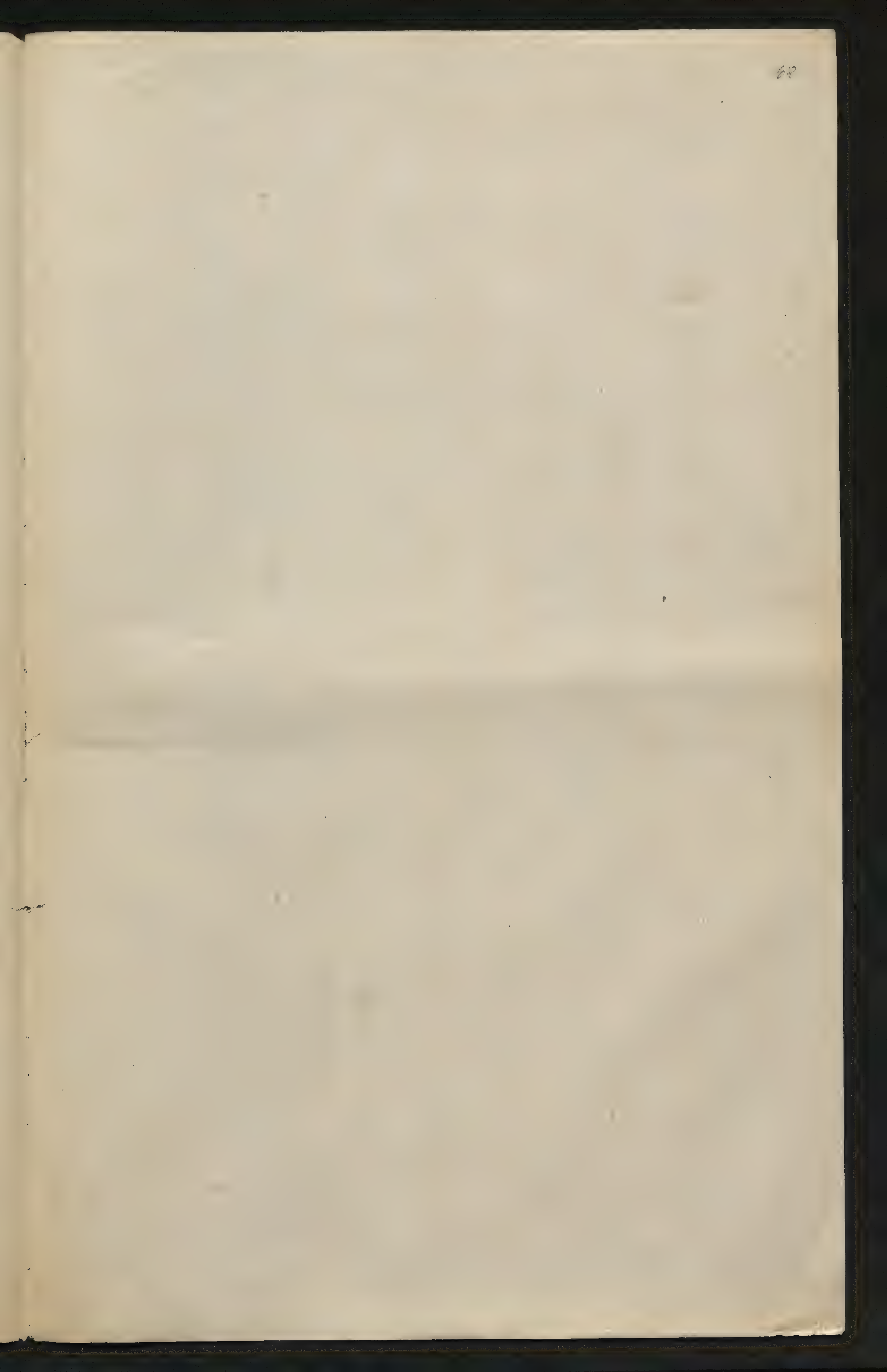
jeżeli to: $+(J_1-J_{-1})(J_2-J_0) + (J_{-3}-J_{-1})(J_4-J_2) + \cdots$

$= (J_1-J_3)(J_0-J_2) + (J_3-J_5)(J_2-J_4) + \cdots$

$= J_2 J_1' + J_4' J_3' + \cdots$

nie można twierdzić żeby $\overline{y_1 y_0} = 0$ był $\overline{y_1 y_2} = 0$ etc.





jeżeli zaś wszystkie $y_{-k}$ aż do $y_0 = 0$ : $c[y_1 J_1 + y_1 J_3 + y_2 J_3 - y_2 J_5 + \dots][y_1(J_0 - J_2) + y_2(J_2 - J_4) - \dots]$

$$\overline{y_0(t)(y_1 - y_0)} = \frac{1}{c}\left[J_2 J_1 + J_4 J_3 + \dots\right] + \left[J_0 J_1 + J_2 J_3 + \dots\right] = \frac{1}{c}\left[J_0 J_1 + J_1 J_2 + J_2 J_3 + \dots\right]$$

po długim rachunku zatem $= \frac{2}{\pi c x} = \frac{2}{\pi c^2 t}$ !!!

$$= \frac{2}{xc}\left[J_1^2 + 3J_3^2 + 5J_5^2 + \dots\right] = \frac{1}{c}\left[J_0^2 + J_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{c\pi}\int_0^\pi \frac{2}{2x\sin\theta} J_1(2x\sin\theta)\,d\theta$$

$$\left[J_\nu(x)\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_{2\nu}(2x\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2nx\, J_0(2x\sin x)\,dx$$

$$= \frac{\pm 1}{\pi c x}\int_0^\pi \left[2J_2 + 6J_6 + 10J_{10} + \dots\right] d\theta$$

$$2\frac{\partial J}{\partial x} = 2\{J_0 J_1' + J_1 J_2' + J_2 J_3' + \dots$$
$$+ J_0' J_1 + J_1' J_2 + J_2' J_3 - \dots\}$$
$$= J_0(J_0 - J_2) + J_1(J_1 - J_3) + J_2(J_2 - J_4)$$
$$+ J_1(J_1 + J_1) + J_2(J_0 - J_2) + J_3(J_1 - J_3)$$
$$= J_0^2 - J_1^2 = (J_0 + J_1)(J_0 - J_1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi J_1'(2x\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 - \sin 2\theta) J_0(2x\sin\theta)\,d\theta$$

$$J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(y\sin\omega - n\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int\left[\cos(y\sin\omega)\cos n\omega + \sin(y\sin\omega)\sin n\omega\right]$$

$$2\cos 2\omega + 6\cos 6\omega + 10\cos 10\omega + \dots$$

$$\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \dots = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{z e^{2i\omega}}{1 - z^2 e^{4i\omega}}$$

$$\sum_{n=1,3,5}^\infty z^n \sin 2n\omega = \frac{z(1+z^2)\sin 2\omega}{1 - 2z^2\cos 4\omega + z^4}$$

$$\sum z^n \cos 2n\omega = \frac{z\cos 2\omega(1 - z^2\cos 4\omega) - z^3\sin 2\omega\sin 4\omega}{1 - 2z^2\cos 4\omega + z^4} = \frac{z\cos 2\omega - z^3\cos 2\omega}{\dots} = \frac{z(1-z^2)\cos 2\omega}{1 - 2z^2\cos 4\omega + z^4}$$

$$1 + 3\alpha^2 + 5\alpha^4 + \dots = \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$\alpha + 3\alpha^3 + 5\alpha^5 + \dots = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{(\frac{1}{\alpha} + \alpha)}{(\frac{1}{\alpha} - \alpha)^2}$$

$$\sum_{n=1,3,5\dots} n\sin 2n\omega = \frac{\partial}{\partial z}\left[\quad\right]_{z=1} = \frac{\sin 2\omega}{2(1-\cos 4\omega)}\left[1 + 3 - \frac{2[4 - 4\cos 4\omega]}{2(1-\cos 4\omega)}\right] = 0$$

$$e^{2i\omega} + 3e^{6i\omega} + \dots = \frac{e^{-2i\omega} + e^{2i\omega}}{(e^{-2i\omega} - e^{2i\omega})^2} = -\frac{\cos 2\omega}{2\sin^2 2\omega}$$

$$\sum n\cos 2n\omega = \frac{\cos 2\omega}{2(1-\cos 4\omega)}\left[1 - 3 - \frac{0}{2(1-\cos 4\omega)}\right] = -\frac{\cos 2\omega}{1-\cos 4\omega} = -\frac{\cos 2\omega}{2\sin^2 2\omega}$$

$$\left[J_1^2 + 3J_3^2 + \dots\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\, \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos(2x\sin\theta\sin\omega)\frac{\cos 2\omega}{\sin^2 2\omega}\,d\omega$$ divergent?

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_1'(2x\sin\theta)\,d\theta$$

$$J = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\,\frac{J_1(2x\sin\theta)}{2\sin\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{4\sin\theta}\left[J_0 + J_2(2x\sin\theta)\right] 2x\sin\theta$$

$$= \frac{x}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[J_0 + J_2(2x\sin\theta)\right] d\theta = \frac{x}{2}\left[J_0^2 + J_1^2\right]$$

$$2\frac{\partial J}{\partial x} = J_0^2 + J_1^2 + 2x(J_0 J_0' + J_1 J_1')$$
$$[J_0 J_1 + J_0 J_1 + J_1 J_0 - J_1 J_2] = J_0^2 - J_1^2 \quad \text{zgadza się!}$$
$$= -\frac{x}{2} J_1(J_0 + J_2) = -2J_1^2$$

$$J'_{2\nu} - J'_{4n-2\nu} - J'_{4n+2\nu} + J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu} -$$

$$= (-1)^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \left[ \underbrace{1 - 2 + 2 \cdots}_{(-1)^m \left[1 - \frac{(4mn)^4}{4x^2}\right]} \right] - \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \left[ \frac{2\nu^2}{x} - \frac{(4n-2\nu)^2 + (4n+2\nu)^2}{2x} + \frac{(8n-2\nu)^2 + (8n+2\nu)^2}{} - \right] \right\}$$

$$- \frac{16n^2 + 4\nu^2}{4x} + \frac{64n^2 + 4\nu^2}{4x} = -\frac{2\nu^2}{x}(-1)^m + \frac{8n^2}{x}\frac{m^2+m}{4}(-1)^m$$

$$= (-1)^{\nu+m} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{(4mn)^4}{4x^2}\right] - \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \left[ \frac{4m^2n^2}{4x} \right] \right\}$$

$$4[J_1' J_2' + J_3' J_4' + \cdots] = J_0 J_1 + 2J_2 J_3 + 2 J_4 J_5 + \cdots$$

$$- [J_1 J_2 + J_3 J_4 + J_5 J_6 \cdots]$$

$$- [J_0 J_3 + J_2 J_5 + J_4 J_7 \cdots]$$

$$J_3 = \frac{4}{x} J_2 - J_1 \qquad J_0$$

$$J_5 = \frac{8}{x} J_4 - J_3 \qquad J_2$$

$$J_7 = \frac{12}{x} J_6 - J_5 \qquad J_4$$

$$J_0 J_3 + J_2 J_5 + \cdots = -(J_0 J_1 + J_2 J_3 + J_4 J_5 \cdots) + \frac{1}{x}[4 J_0 J_2 + 8 J_2 J_4 + 12 J_4 J_6 + \cdots 2\nu\, J_{\nu-2} J_\nu]$$

$$J_3(x+y) = \sum J_{3-\lambda}(x) J_\lambda(y)$$

$$= J_0(x) J_3(y) + J_{-1}(x) J_4(y) + J_{-2}(x) J_5(y) + \cdots$$

$$+ J_1(x) J_2(y) + J_2(x) J_1(y) + J_3(x) J_0(y) + J_4(x) J_{-1}(y) + J_5(x) J_{-2}(y) + \cdots$$

$$J_3(2x) = 2J_1 J_2 + J_0 J_3 - J_1 J_4 + J_2 J_5 - J_3 J_6 + J_4 J_7 - J_5 J_8 + J_6 J_9$$

$$J_3(0) = $$

Qiryc $-y_{-2} = y_{-1} = y_0(0) = 0$ $\quad \overline{y_1} = \overline{y_2} = \overline{y_3}$ ...

$$y_0 = y_1(0) J_2 + y_2(0) J_4 + y_3(0) J_6 + \dots$$

$$y_1 = y_1(0) J_0 + y_2(0) J_2 + y_3(0) J_4 + \dots$$

$$\dot y_0\, y_1 = \overline{y_1}^2 J_2' J_0 + \overline{y_2}^2 J_4' J_2 + \overline{y_3}^2 J_6' J_4 + \dots = \overline{y_1}^2 \left[J_0 J_2' + J_2 J_4' + J_4 J_6' + \dots\right]$$

$$= \overline{y_1}^2 \begin{cases} J_0 J_1 + J_2 J_3 + J_4 J_5 \dots \\ -\left[J_0 J_3 + J_2 J_5 + J_4 J_7 + \dots\right] \end{cases}$$

$$= J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_2 J_3 - J_2 J_5 + J_4 J_5 \dots = J_0 J_1 - J_1' J_3 - J_3' J_5 - \dots$$

$$\dot y_0 y_1 = \overline{y_1} \left[J_0 J_2' + J_2 J_4' + \dots + J_{-2} J_0' + J_4 J_2' \dots\right]$$

$$J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$$

$$J_\nu = \int J_{\nu-1} - \int J_{\nu+1} \qquad \int J_{\nu-1} = J_\nu + \int J_{\nu+1}$$

$$= \overline{y_1}^2 \left[J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_2 J_3 - J_2 J_5 + J_4 J_5 - J_4 J_7 \right.$$
$$\left. + J_2 J_1 - J_2 J_1 + J_4 J_1 - J_4 J_3 + J_6 J_3 - J_6 J_5\right]$$

$$\int J_0\,dx\; J_2 + \dots = J_1 + \int J_2\,dx$$

$$J_1 J_2 + J_3 J_4 + \dots$$

$$= \overline{y_1}^2 \left[\frac{J_1(2x)}{2} - J_1 J_2 - \frac{J_1 J_2}{2} + \frac{1}{4} J_3(2x)\right]$$

$$J_1(x+y) = J_1(x) J_0(y) + J_2(x) J_1(y) + J_3(x) J_2(y) + \dots$$
$$+ J_0(x) J_{-1}(y) + J_1(x) J_{-2}(y) + \dots$$
$$= J_1(x) J_0(y) + J_2(x) J_1(y) + J_3(x) J_2(y) + \dots - \left[J_1(y) J_0(x) + J_2(y) J_1(x) + \dots\right]$$

$$J_1(x) J_0(y) + J_0(x) J_1(y) + J_{-1}(x) J_2(y) + J_{-2}(x) J_3(y)$$
$$J_2(x) J_{-1}(y) + J_3(x) J_{-2}(y) \dots$$
$$= J_0(x) J_1(y) - J_1(x) J_2(y) + J_2(x) J_3(y)$$
$$+ J_1(x) J_0(y) - J_2(x) J_1(y) + J_3(x) J_2(y)$$

$$J_1(2x) = 2\left[\underbrace{J_0 J_1 - J_1 J_2}_{J_1 J_1'} + \underbrace{J_2 J_3 - J_3 J_4}_{J_3 J_3'} \dots\right]$$

$$J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 \dots = \int J_1(2x)\,dx \qquad J_1 J_0' - J_1 J_2' + J_3 J_2' - J_3 J_4' \dots = J_1 J_{-1} - 2J_1^2 + 2J_1 J_3 - 2J_3^2 \dots$$

$$J_1'(2x) = \left[J_1'^2 + J_3'^2 + \dots\right] + J_1 J_1'' + J_3 J_3'' + \dots$$

$$\overline{y_1}^2 \frac{2}{x^2}\left[1 + 2 + \dots \nu\right]$$
$$= \overline{y_1}^2 \left(\frac{\nu}{x}\right)^2$$
$$= \text{const}$$

$$J_{2\nu} J_{2\nu+2}' = (-1)^\nu (-1)^{\nu+1} \frac{2}{\pi x}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\nu^2}{x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2(\nu+1)^2}{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi x}\left[\frac{2\nu^2}{x}\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2(\nu+1)^2}{x}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= +\frac{2}{\pi x}\,\frac{4\nu}{x}\,\frac{\pi}{4} = \frac{2\nu}{x^2}$$

$$\sum \left[\varphi_{2\nu} P_{2\nu+2} - \varphi_{2\nu+2} P_{2\nu}\right]$$

$= const$

$\sum [\varphi_{2\nu} P_{2\nu+2} - \varphi_{2\nu+2} P_{2\nu}]$

$J_{2\nu} = (-1)^\nu \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{2\nu^2}{x}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]$

$\int J_{2\nu}\, dx = (-1)^\nu \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{2\nu^2}{x}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right]$

$J_{2\nu+2} \int J_{2\nu}\, dt = (-1)^\nu (-1)^{\nu+1} \frac{2}{\pi x} \left[\sin(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{2(\nu+1)^2}{x}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]\left[-\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{2\nu^2}{x}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right]$

$= \frac{2}{\pi x} \quad \frac{4\nu}{x} \frac{\pi}{4} = \frac{2\nu}{x^2}$

$\bar{y}_1^2 \int J_0 dt \; J_2 + \dots$

$\bar{y}_1^2 \left[ J_2 \int J_0 dt + J_4 \int J_2 dt + \dots \right]$

$J_{2\nu} J'_{2\nu+2} = \frac{1}{2} J_{2\nu} \left[ J_{2\nu+1} - J_{2\nu+3} \right]$

$J_{\nu-1} J'_{\nu+1} = \frac{1}{2} J_{\nu-1} \left[ J_\nu - J_{\nu+2} \right]$

$\frac{4\nu(\nu+1)}{x^2} J_\nu - J_\nu - \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu-1}$

$= \frac{1}{2} J_{\nu-1} \left[ \left(2 - \frac{4\nu(\nu+1)}{x^2}\right) J_\nu + \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu-1} \right]$

$= \left[\frac{\nu}{x} J_\nu + J'_\nu\right] \left\{ \left(1 - \frac{2\nu(\nu+1)}{x^2}\right) J_\nu + \frac{\nu+1}{x} \left[\frac{\nu}{x} J_\nu + J'_\nu\right] \right\}$

$J_\nu - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} J_\nu + \frac{\nu+1}{x} J'_\nu$

$= \frac{\nu}{x} \left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right] J_\nu^2 + \frac{\nu+1}{x} J'^2_\nu + J_\nu J'_\nu$

$= \frac{\nu}{x} J_\nu^2 - \frac{\nu^3}{x^3} J_\nu^2 - \frac{\nu^2}{x^3} J_\nu^2 + \frac{\nu+1}{x} J'^2_\nu + J_\nu J'_\nu$

---

$\frac{1}{x}\left[J_1^2 + 3 J_3^2 + 5 J_5^2 + \dots\right] \qquad 0$

$-\frac{1}{x^3}\left[J_1^2 + 3^3 J_3^2 + 5^3 J_5^2 + \dots\right] \qquad 0$

$-\frac{1}{x^3}\left[J_1^2 + 3^2 J_3^2 + 5^2 J_5^2 + \dots\right] \qquad -\frac{1}{\sin^3 2x} + \frac{1}{2\sin 2x}$

$+\frac{1}{x}\left[J'^2_1 + J'^2_3 + J'^2_5\right]$

$+\frac{1}{x}\left[J'^2_1 + 3 J'^2_3 + 5 J'^2_5 \dots\right]$

$+\frac{1}{2} \frac{2}{\pi x}\left[J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 \dots\right] \qquad = J_1(2x)$

$J_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2nx \; J_0(2x \sin x)\, dx$

$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} y^n \sin 2nx =$

$$J_{4mn-2\nu-2} - J_{4mn-2\nu} - J_{4mn+2\nu} + J_{4mn+2\nu+2} = (-1)^{\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[\begin{array}{l} -\frac{(4mn-2\nu-2)^4}{8x^2} + (4mn-2\nu)^4 \\ -(4mn+2\nu+2)^4 + (4mn+2\nu)^4 \end{array}\right] = \begin{array}{l} 8(4mn-2\nu)^3 - 24(4mn-2\nu)^2 \\ -8(4mn+2\nu)^3 - 24(4mn+2\nu)^2 \end{array}$$

$$-16.6\,4.\frac{16m^2n^2\nu}{x^2}$$

$$+\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}\left|\begin{array}{l} (4mn-2\nu-2)^2 - (4mn-2\nu)^2 = -4(4mn-2\nu)+4 \\ +(4mn+2\nu+2)^2 - (4mn+2\nu)^2 = 4(4mn+2\nu)+4 \end{array}\right. = 16\nu + 8$$

bez końców:

$$\dot{y}_0 y_1 = \bar{y}_0^2 J_0' J_2 + \bar{y}_1^2 J_2' J_0 + \bar{y}_{-1}^2 J_2' J_4 + \bar{y}_2^2 J_2 J_4' + \bar{y}_{-2}^2 J_4' J_6$$

$$= \bar{y}_0^2\left[J_0' J_2 + J_0 J_2' + J_2' J_4 + J_2 J_4' + \cdots\right] + \bar{y}_0^2 \beta\left[J_2'(J_0 - J_4) + 2J_4'(J_2 - J_6) + 3J_6'(J_4 - J_8) \cdots\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} J_4 + J_6 \\ + J_6 - J_8 \end{array}\right\} = J_5' + J_7' + \frac{2.6\,J_6'}{x}$$

$$\int \dot{y}_0 y_1\, dt = y_0 y_1 - \int y_0 \dot{y}_1\, dt$$

$$\frac{1}{x}\left\{2^2 J_2'^2 + 4^2 J_4'^2 + 6^2 J_6'^2 + \cdots\right\}$$

$$\frac{\nu^3}{x^2}$$

$$J_2(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} J_{2-\lambda}(x)\, J_\lambda(y)$$

$$= J_2(x) J_0(y) + J_1(x) J_1(y) + J_0(x) J_2(y) + J_{-1}(x) J_3(y) + \cdots + J_3(x) J_{-1}(y) + J_4(x) J_{-2}(y)$$

$$= J_1(x) J_1(y) + J_2(x) J_0(y) - J_1(x) J_3(y) + J_2(x) J_4(y) - J_0(x) J_2(y) - J_3(x) J_1(y) + J_4(x) J_2(y) -$$

$$J_2(2x) = J_1^2(x) + 2[J_0 J_2 - J_1 J_3 + J_2 J_4 - J_3 J_5 \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[J_2(2x) - J_1(x)^2\right] = 2\left[J_0 J_2' - J_1 J_3' + J_2 J_4' - J_3 J_5' \cdots + J_0' J_2 - J_1' J_3 + J_2' J_4 \cdots\right]$$

$$= 2\left[J_1(2x) - J_3(2x) - J_1(x) J_1'(x)\right]$$

$$J_1'^2 + J_3'^2 \cdots = J_1'(2x) + 2(J_1^2 + J_3^2 + \cdots) + J_1^2 - 2(J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots)$$

$$2(J_1^2 + J_3^2 + \cdots) \to \int J_1(2x)\,dx \qquad (J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots) \to = \frac{J_2(2x)}{2}$$

$$J_0(x+y) = J_0(x) J_0(y) + 2[-J_1(x) J_1(y) + J_2(x) J_2(y) \cdots - J_3(x) J_3(y) \cdots]$$

$$J_0(2x) = J_0^2 + 2[-J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 \cdots]$$

$$J_2(2x) = 2J_1^2 + 4[J_0 J_2 + J_2 J_4 + J_4 J_6 \cdots]$$
$$= -4[J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots]$$

$$J_2(0) = 0 = -J_1^2 + 2\{J_0 J_2 + J_1 J_3 + J_2 J_4 + J_3 J_5 \cdots\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad J_1 J_1' + J_0 J_2' + J_1 J_3' + J_2 J_4' + \cdots + J_0' J_2 + J_1' J_3 + J_2' J_4 \cdots = 0$$

~~$J_1 J_0 - J_1 J_2 + J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_1 J_2 - J_1 J_4$~~

~~$-J_1 J_0 - J_1 J_2 + J_0 J_3 - J_2 J_3 + J_1 J_4 - J_3 J_4$~~

$$= 2[J_0 J_1 - J_0 J_3 - J_1 J_2 + J_1 J_4 + J_2 J_3 - J_2 J_5 - J_3 J_4 + J_3 J_6 + J_1 J_2 - J_1 J_2 - J_0 J_3 + J_2 J_3 + J_1 J_4 - J_3 J_4 \cdots$$

$$= 2[J_0 J_1 - J_1 J_2 - 2[J_0 J_3 + J_1 J_2 \cdots$$

~~$= 4 J_1$~~

$$= 4[J_0 J_2' - J_1 J_3' + J_2 J_4' \cdots] - 2(J_0 J_1 + J_1 J_2)$$

$$J_3(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} J_{3-\lambda}(x) J_\lambda(y)$$

$$= J_0(x) J_3(y) + J_1(x) J_4(y) + J_2(x) J_5(y) - J_3(x) J_6(y) \cdots$$

$$+4\Big[ \qquad \Big(\Big[\frac{4^2}{2x}\Big] + \frac{16.2n}{x} - \frac{32.2n}{x} \Big) \quad 2m$$

$$+6\Big[ \qquad \Big(\Big[\frac{6^2}{2x}\Big] + \frac{16.3n}{x} - \frac{32.3n}{x} + \dots \Big) \quad 3m$$

$$+8\Big[ \qquad \Big]$$

$$J'_{2\nu} + J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu} + J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu} + \dots J'_{4mn+2\nu}$$

$$= (-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[\Big[\cos\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big)(2m+1) - \frac{1}{2x}\sin\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big)\Big[4\nu^2 + (4n-2\nu)^2 + (4n+2\nu)^2 + (8n-2\nu)^2 + (8n+2\nu)^2 \dots\Big]$$

$$\Big[2(4n)^2\big[1+2^2+\dots m^2\big] + (2m+1)4\nu^2\Big] \;\mp\; \frac{32\,m^3n^2}{3}$$

$$\mp (-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\; 2m\Big[\cos\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big) - \frac{8}{3}\frac{m^2n^2}{x}\sin\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big)\Big]$$

---

$$2\nu\, J'_{2\nu} + (4n-2\nu)J'_{4n-2\nu} - (4n+2\nu)J'_{4n+2\nu} - (8n-2\nu)J'_{8n-2\nu} + (8n+2\nu)J'_{8n+2\nu} \dots = (-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{$$

$$2\nu\Big[\cos\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big) - \frac{2\nu^2}{x}\sin\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big)\Big]$$

$$-4\nu\cos\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big) - \frac{48n^2\nu}{x}\sin\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big) \qquad + 4\nu\cos\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big) + \frac{48.n^2\nu.4}{x}\sin\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big) \quad - \qquad = -(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;\frac{48n^2\nu}{x}\big[1-2^2+3^2 - \dots m^2\big]\sin\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big)$$

$$\pm\frac{m^2}{2}$$

$$\Sigma\nu^2 = \frac{n^3}{3}$$

$$\Sigma\Sigma\Pi = \pm\frac{2}{\pi x^2}\; 2m \cdot \frac{8}{3}\frac{m^2n^2}{x} \cdot \frac{48n^2}{x}\frac{m^2}{2}\frac{n^3}{3}\sin^2\big(x+\tfrac{\pi}{4}\big)$$

$$\frac{m^5n^7}{x^4} \qquad m = \frac{ct}{n} \qquad x = ct$$

$$\frac{\nu^5}{x^4} \qquad ctn^2$$

Jiné konce volné, budu odvozovat dodatečně

$$y_0 = y_0\left[J_0 + 2J_{4n} + 2J_{8n} + \dots + 2J_{4mn}\right] \quad = \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) . m$$

$$+ y_1\left[J_2 + J_{4n-2} + J_{4n+2} + J_{8n-2} + J_{8n+2} + \dots\right]$$

$$+ y_{-1}\left[\ " \qquad\qquad \right] \quad \Big\} - \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) . m$$

$$+ y_2\left[J_4 + J_{4n-4} + J_{4n+4} + \dots \right]$$

$$y_1 - y_0 = y_0\left[-J_0 + J_2 + J_{4n-2} - 2J_{4n} + J_{4n+2} + J_{8n-2} - 2J_{8n} + J_{8n+2} + J_{12n-2} - 2J_{12n} + J_{12n+2}\right.$$

$$+ y_1\left[J_0 - J_2 + J_{4n-4} - J_{4n-2} - J_{4n+2} + J_{4n+4} - J_{8n-2} + 2J_{8n} - J_{8n+2} + J_{12n-4}\right.$$

$$+ y_{-1}\left[-J_2 + J_4 - J_{4n-2} + 2J_{4n} - J_{4n+2} + J_{8n-4} - J_{8n-2} - J_{8n+2} + J_{8n+4}\right.$$

$$+ y_2\left[J_2 - J_4 + J_{4n-6} - J_{4n-4} - J_{4n+4} + J_{4n+6} - J_{8n-4} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+4}\right.$$

$$y_{-2}\left[-J_4 + J_6 - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} + J_{8n-6} - J_{8n-4} \dots\right.$$

$$= y_0\left[-J_1' + J_{4n-1}' - J_{4n+1}' + J_{8n-1}' - J_{8n+1}' \dots\right.$$

$$= y_0\left[-J_1' + J_{4n-1}' - J_{4n+1}' + J_{8n-1}' - J_{8n+1}'\right.$$

$$y_1\left[+J_1' + J_{4n-3}' - J_{4n+3}' - J_{8n-1}' + J_{8n+1}'\right.$$

$$y_{-1}\left[-J_3' - J_{4n-1}' + J_{4n+1}' + J_{8n-3}' - J_{8n+3}'\right.$$

$$y_2\left[J_3' + J_{4n-5}' - J_{4n+5}' - J_{8n-3}' + J_{8n+3}'\right.$$

$$y_{-2}\left[-J_5' - J_{4n-3}' + J_{4n+3}' + J_{8n-5}' - J_{8n+5}'\right.$$

$$+ \frac{y_0 \beta}{x}\left[2J_2' + (4n-2)J_{4n-2}' - (4n+2)J_{4n+2}' + (8n-2)J_{8n-2}' - (8n+2)J_{8n+2}'\right.$$

$$+ 2\left[+4J_4' + (4n-4)J_{4n-4}' - (4n+4)J_{4n+4}' - (8n-4)J_{8n-4}' + (8n+4)J_{8n+4}' \dots\right]$$

$$+ 3\left[6J_6' + (4n-6)J_{4n-6}' - \right.$$

$$+ 4\left[8J_8' + (4n-8)J_{4n-8}' \dots\right.$$

$$J_\nu = (-1)^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{\nu^2}{2x}\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$J_\nu' = (-1)^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{\nu^2}{2x}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$(4mn-2\nu)J_{4mn-2\nu}' - (4mn+2\nu)J_{4mn+2\nu}' = (-1)^{\nu}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[-4\nu\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{(4mn-2\nu)^3}{2x}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{(4mn+2\nu)^3}{2x}\sin \dots\right]$$

$$= (-1)^{\nu+1}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[4\nu\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{48m^2n^2\nu}{x}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$y_0(y_1 - y_0) = 2c\,\bar{y}_0^2\left[\dots\dots \quad + \frac{4\beta}{x}\left\{\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{2}{\pi x}\left\{2\left[\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\left(\left[\tfrac{1^2}{2x}\right] + \tfrac{16n}{x} - \tfrac{32n}{x} + \tfrac{48n}{x}\right)\right.\right.\right. \quad m$$

$$+4\left[\qquad \left(\left[\tfrac{2^2}{2x}\right] + \tfrac{16.2n}{x} - \tfrac{32.2n}{x}\right)\right. \quad 2m$$

$$+6\left[\qquad \left[6^2\right] + 16.3n \quad 32.3n \right. \quad 3m$$

$$J_0(0) = 1 = J_0^2 + 2\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \cdots\right]$$

$$J_1^2 + J_3^2 + \cdots = \tfrac{1}{4}\left[1 - J_0(2x)\right]$$

$$J_2^2 + J_4^2 + J_6^2 \cdots = \tfrac{1}{4}\left[1 + J_0(2x)\right] - \frac{J_0^2}{2}$$

$$J_0 J_1' + J_1 J_2 + J_2 J_3 + J_3 J_4 \cdots$$

$$-J_0 J_3 + J_1 J_4 - J_2 J_5 \cdots$$

$$+\left[J_1 J_4 + J_3 J_6 + J_5 J_8 \cdots\right]$$

$$- J_1 J_2 - J_3 J_4 \cdots$$

$$+J_2(2x) = -4\left[J_1 J_3 + J_3 J_5 + \cdots\right]$$

$$J_{1}^2(x) = +2\left[J_0 J_2 + J_1 J_3 + J_2 J_4 + \cdots\right]$$

$$J_2'^2 + J_4'^2 + \cdots = \frac{J_1^2}{4} + \tfrac{1}{4}\left[J_3^2 + J_5^2 + \cdots\right] = -\frac{J_1^2}{4} + \tfrac{1}{8}\left[1 - J_0(2x)\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots\right] \qquad + \tfrac{1}{8} J_2(2x) - \frac{J_1^2}{4}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2} - 2J_1^2 - J_1'(2x)\right]$$

$$J_0'^2 + J_2'^2 + J_4'^2 + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{J_0(2x)}{2} + \frac{J_2(2x)}{2}$$

$$= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} J_1^2 - J'(2x)$$

$$J_1(x)J_2(y) + J_2(x)J_1(y) + J_3(x)J_0(y) - J_4(x)J_1(y) + J_5(x)J_2(y) - J_6(x)J_3(y) \cdots$$

$$= J_1(x)J_2(y) + J_2(x)J_1(y) - 2\{J_0(x)J_3(y) - J_1(x)J_4(y)$$

$$+ J_3(x)J_0(y) - J_4(x)J_1(y)$$

$$J_3(2x) = 2\left\{J_1 J_2 - 2\left[J_0 J_3 - J_1 J_4 + J_2 J_5 - J_3 J_6 + \cdots\right]\right\}$$

$$J_0 J_3 - J_1 J_4 + J_2 J_5 \cdots = \frac{J_1 J_2}{2} - \tfrac{1}{4} J_3(2x)$$

$$J_2(2x) = +4\left[J_0 J_2 + J_2 J_4 + J_4 J_6 + \cdots\right]\}$$

$$2\,J_2'(2x) - 4 J_1 J_1' = 4\left[J_0 J_2' + J_2 J_4' \cdots\right.$$

$$\left. + J_0' J_2 + J_2' J_4 + \cdots\right]$$

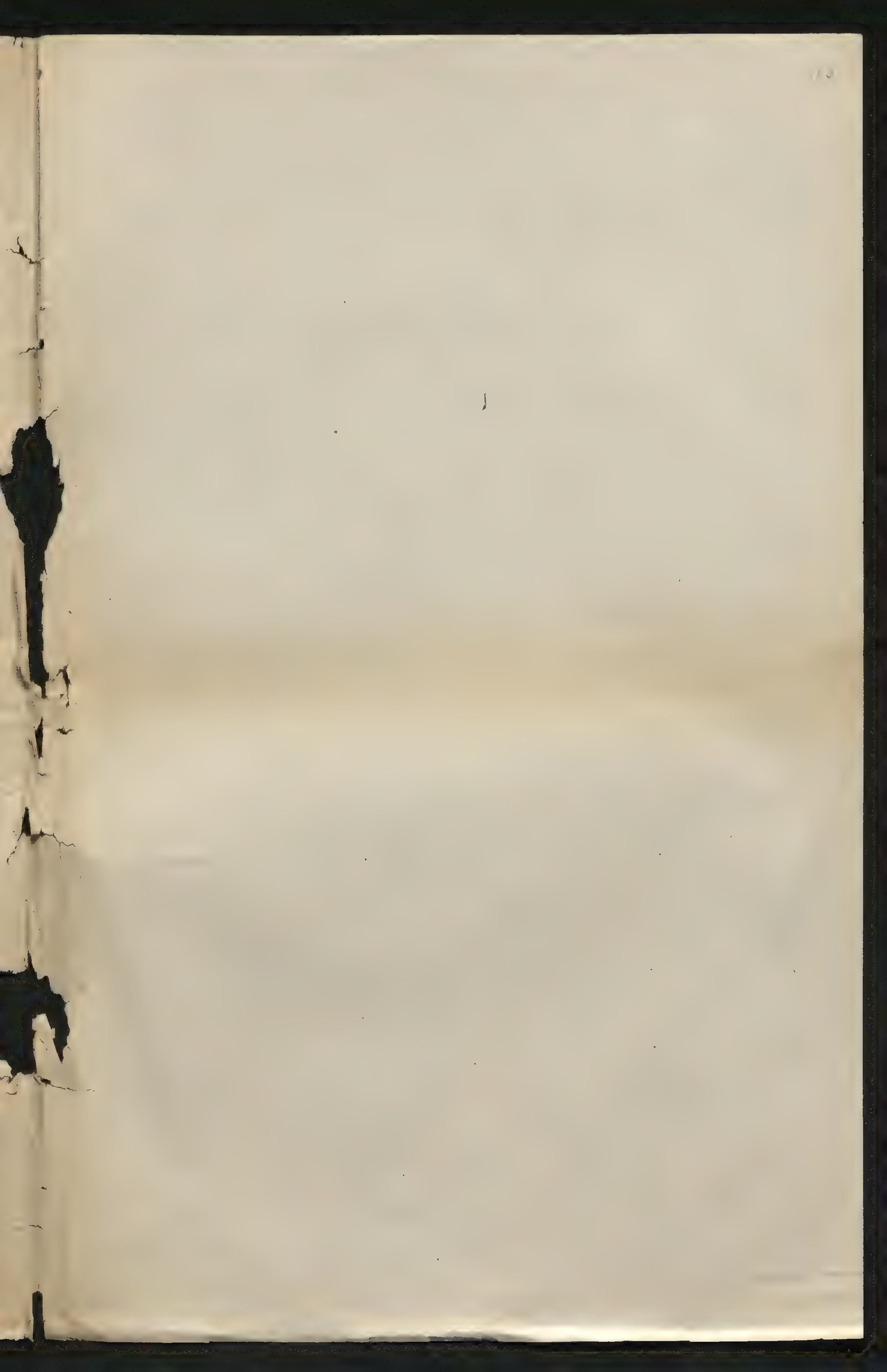
$$= J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_2 J_3 - J_2 J_5 + \cdots$$

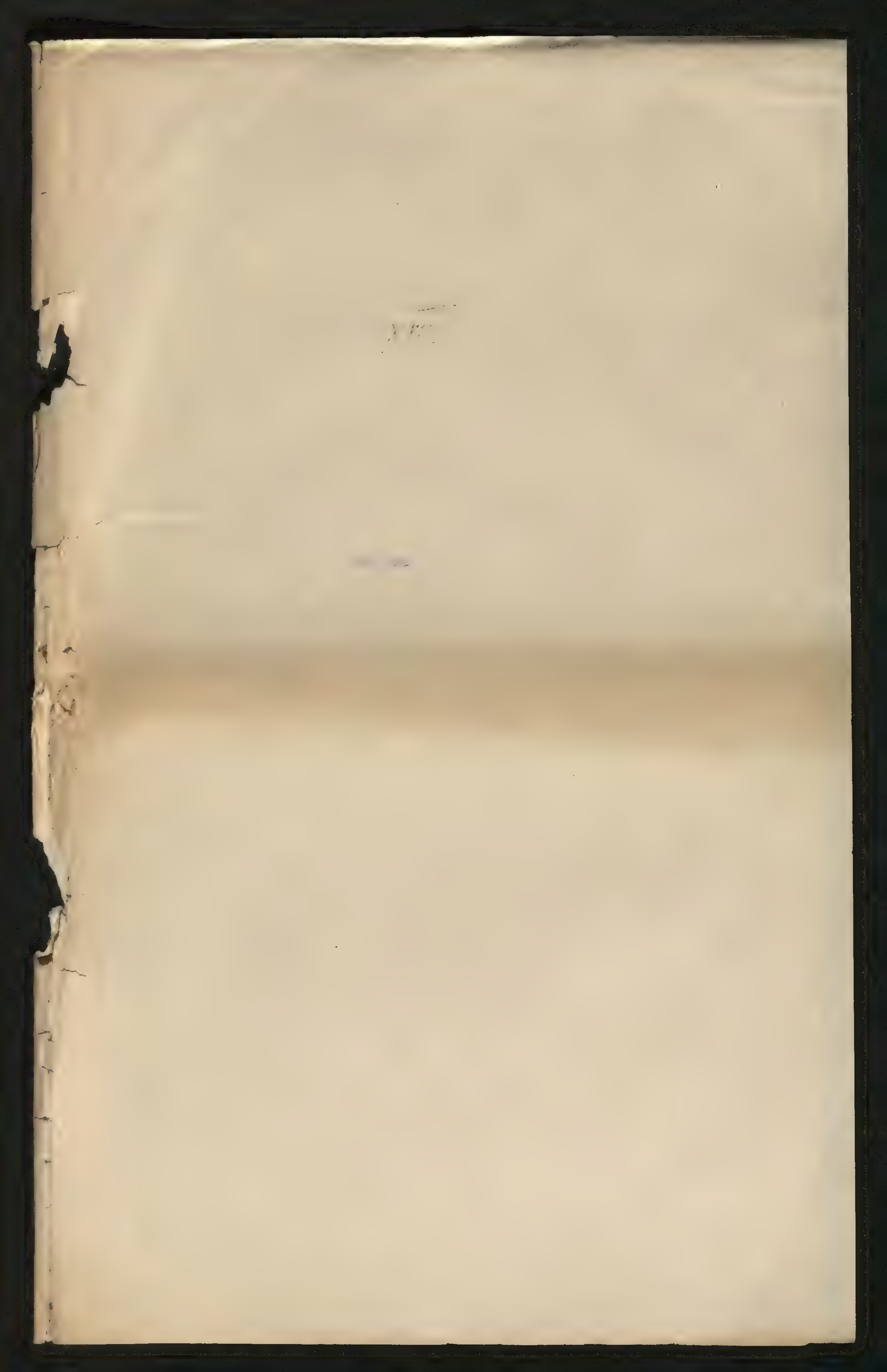
$$- J_1 J_2 - J_1 J_2 + J_1 J_4 - J_3 J_4 + J_3 J_6 - J_5 J_6$$

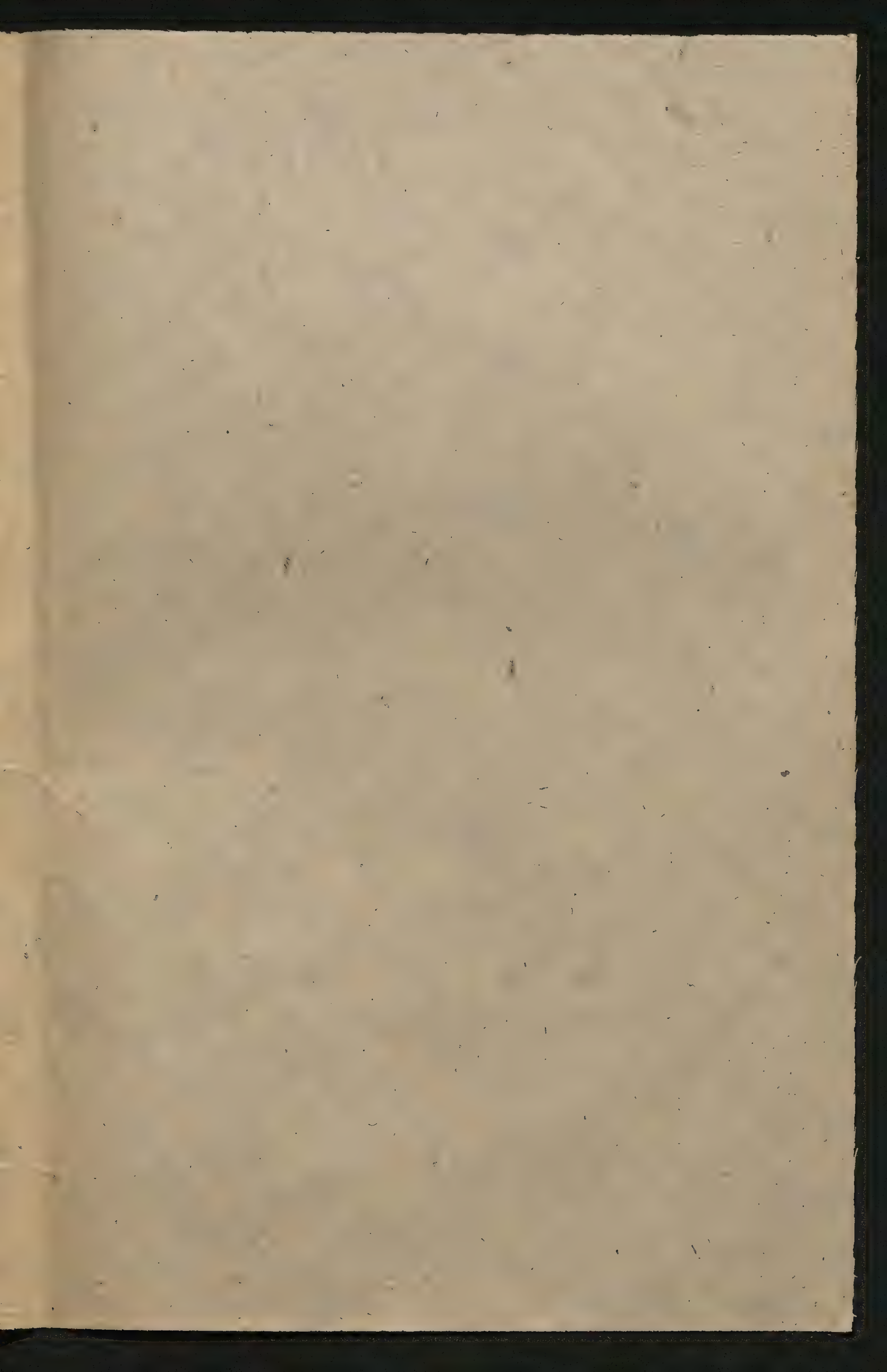
$$1 = J_0^2 + 2\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \cdots\right]$$

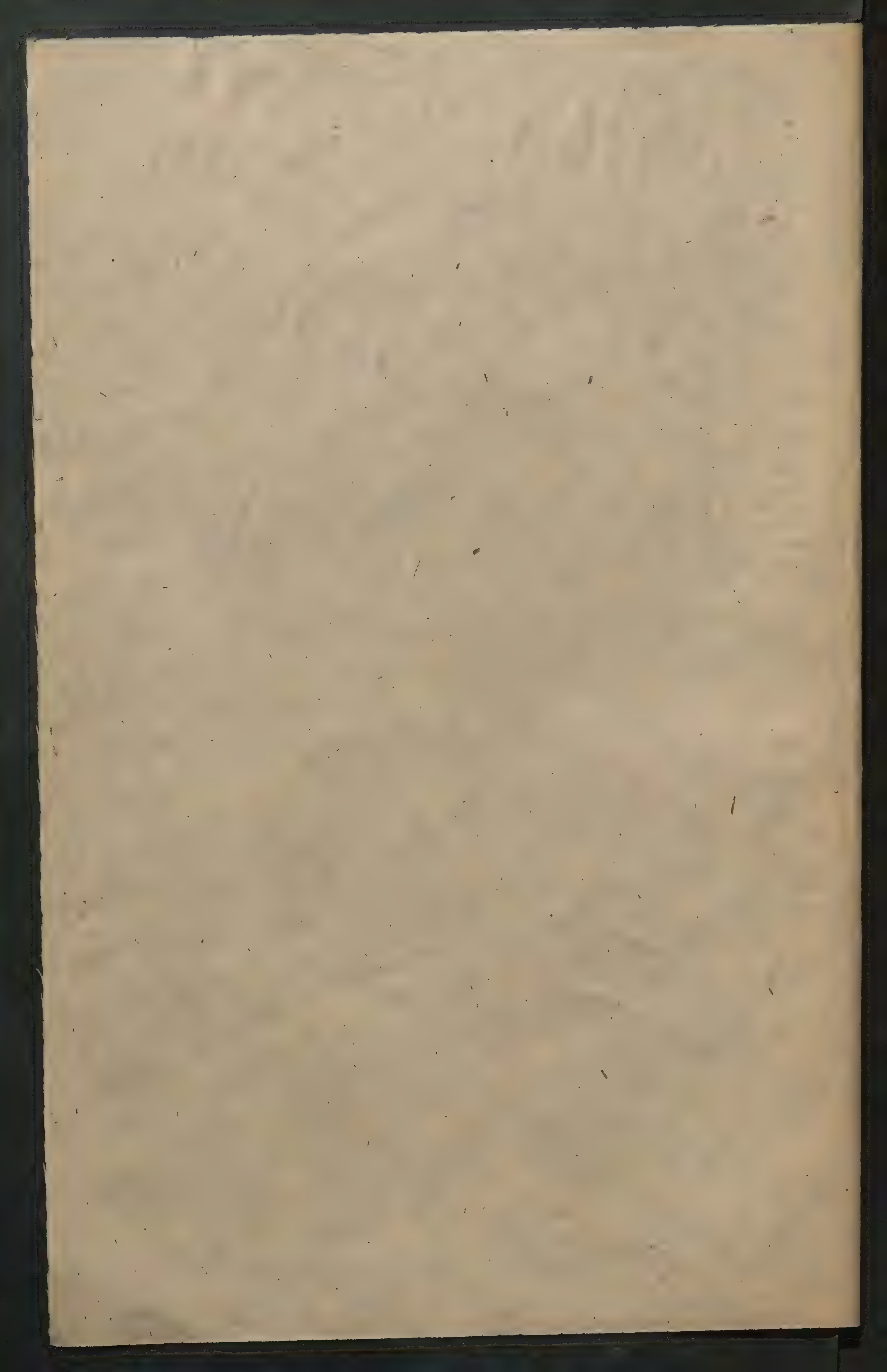
$$0 = J_0 J_0' + 2\left[J_1 J_1' + J_2 J_2' + \cdots\right]$$

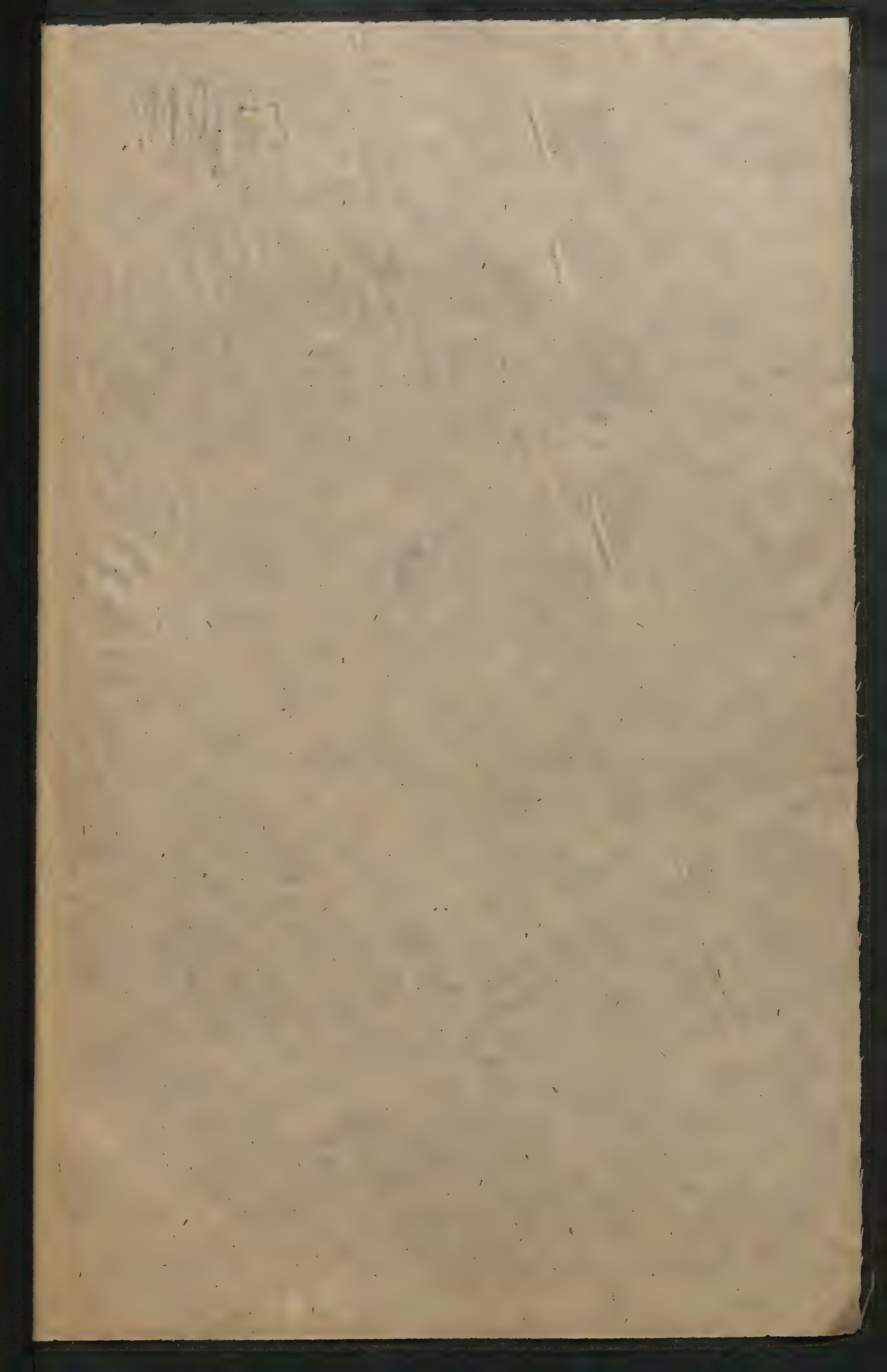
$$0 = -J_0 J_1 + J_1 J_0 - J_1 J_2 + J_1 J_2$$

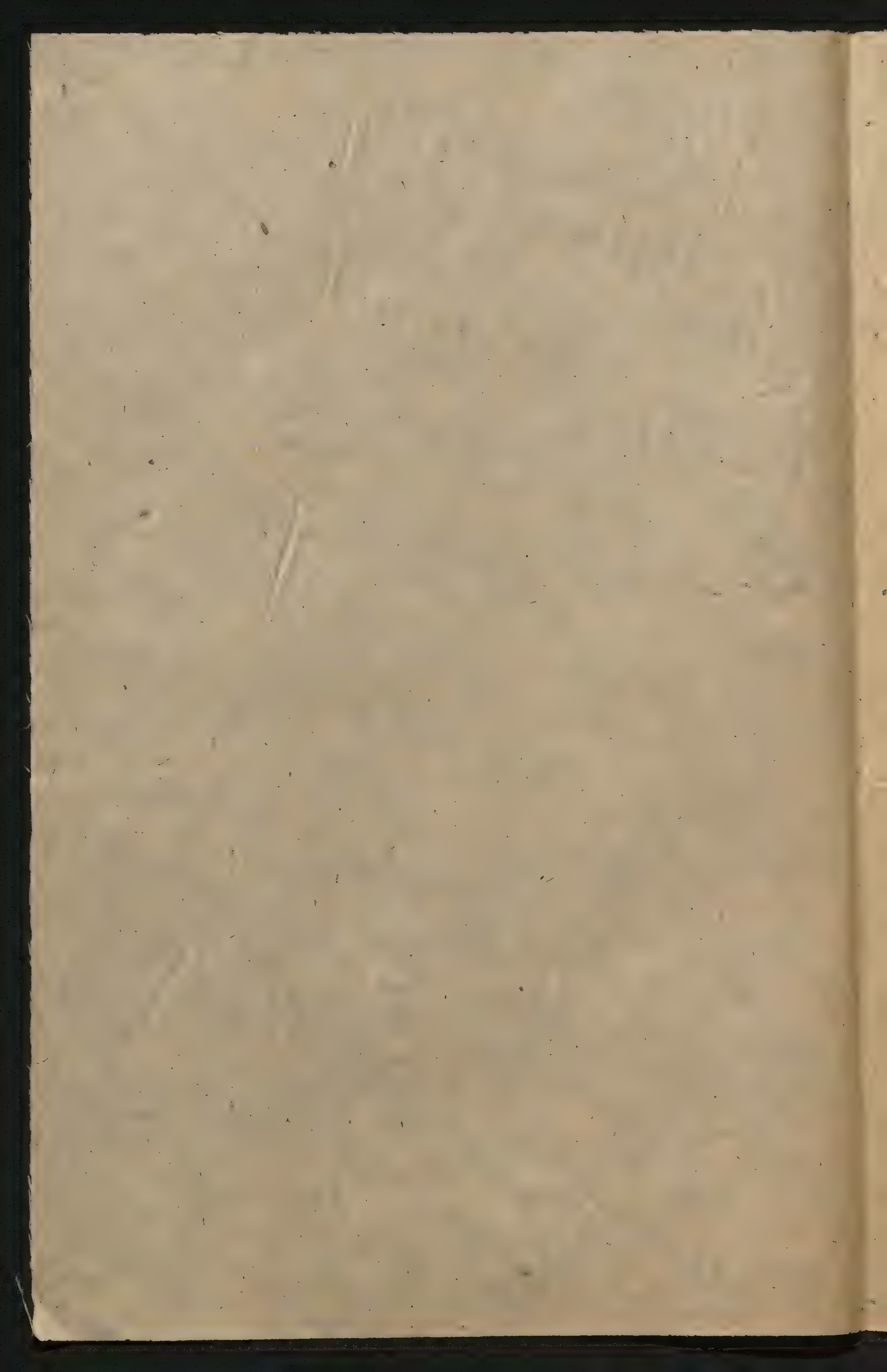












$$u = \frac{3}{4} R c\, xy \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{9}{2} R a c \frac{(x+a)(x+2a)y}{\rho^5}$$

$$v = \frac{3Rc}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{3}{4} R c\, y^2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) - \frac{3}{2} \frac{Rac(x+a)}{\rho^3} + \frac{9}{2} Rac \frac{y^2(x+a)}{\rho^5} \qquad // \ \frac{Rca^2}{\delta}\alpha$$

$$w = \frac{3}{4} R c\, yz \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{9}{2} Rac \frac{yz(x+a)}{\rho^5}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right)$$

$$= \sum\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{(x+2a)^2 + y^2 + z^2}}\right] = \sum\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4ax + 4a^2}}\right] = \sum \frac{1}{r}\left\{1 - \left[1 + \frac{4ax}{r^2} + \frac{4a^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\left[1 - \frac{2ax}{r^2} - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{6x^2}{r^4}\right.$$

$$x=0 \qquad = \sum \frac{2a^2}{r^3}$$

$$-\int \frac{2\pi r\, dr}{r^3} = -\frac{2\pi}{r}\Big|$$

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3} \underset{x=0}{=} \frac{6a^2}{r^5}$$

$$9Ra^2c \sum \frac{y^2}{r^5} = 9Ra^2c \int \frac{\sin^2\theta}{r^5} r^3 d\theta\, dr =$$

Jeśli tylko jedna warstwa w odstępie a wszystkie z jednakową prędkością

$$\sum_{\text{z wszystkich}} v = \frac{3Rc}{4} \sum \frac{2a^2}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{Ra^2c}{\Sigma\rho^3} + \frac{3}{4} Rc \sum \frac{6a^2y^2}{r^5} + \frac{9}{2} Ra^2c \frac{\Sigma y^2}{\rho^5}$$

$$\frac{1}{2} Ra^2c \sum \frac{a^2}{r^5} \qquad = 9Ra^2c \sum \frac{y^2}{r^5}$$

to jest zawsze ujemna prędkość we wszystkich miejscach mej warstwy tj. np.: $9\frac{Ra^2c}{\delta^3}$ więc w całej warstwie troszkę taką prędkość z odpowiednim znakiem superponować miejscach

gdzie dla każdej kuli wzgl. tej prędkości

. . . .

. . . .

$$\sum \frac{y^2}{r^5} = 0 + \frac{2 \cdot 1^2}{\delta^5}\left\{1 + \frac{2}{\sqrt{2^5}} + \frac{2}{\sqrt{5^5}} + \frac{2}{\sqrt{10^5}} + \frac{2}{\sqrt{\ }}\right.$$

$$+ \frac{2 \cdot 2^2}{(2\delta)^5}\left\{\right.$$

Dla r dużego (punkty w odstępie od mej warstwy)

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^2} \cos\theta\, 2\pi r \sin\theta\, d\theta \quad n\ r^2$$

$$= n\pi$$

$$\int 2\pi r^3 \ldots$$

$$\frac{1}{x^2}$$

$$v = \frac{3Rc}{4} \sum \frac{2ax}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{\Sigma Racx}{\rho^3} +$$

$$v = \frac{3}{4} Rc \sum \frac{2ax}{r^3} + \frac{3}{4} Rc \sum \frac{6axy^2}{r^5} - \frac{3}{2} Rac \sum \frac{x}{\rho^3} + \frac{9}{2} Rac \sum \frac{y^2 x}{\rho^5}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) = n\pi \quad (n = \text{liczba punktów na } 1\,cm^2)$$

$$v = \frac{3}{2} Rc\, n\pi\alpha$$

$$-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) = 2a \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{4a^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2ax}{r^3} + 2a^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right)$$

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{6ax}{r^5}$$

$$v = \frac{3}{2} Rc \left\{\frac{ax}{r^3} + a^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) - \frac{a^2}{r^3} - \frac{ax}{r^3} + \frac{6a^2x^2}{r^5}\right\} + \frac{3}{4} Rc\, y^2 \frac{6ax}{r^5} + \frac{9}{2} \frac{Racy^2x}{r^5}$$

$$\frac{3a^2x^2}{r^5} \qquad 9Rac \frac{xy^2}{r^5}$$

ten człon maleje z odległością od ściany jak $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \alpha$$

$$u = \alpha \lg r + \beta$$

dla $r = \infty$ $u = 0$ zatem niemożliwe $\alpha = 0$

J ——— J

celem jednak aby nie mógł się poruszać w kierunku swojej osi tak aby prędkość w $\infty$ była $= 0$

(bez prędkości [illegible])

$v \sin\psi = v_0 \sin\varphi \qquad v = v_0(1+\varepsilon\cos\varphi)$

$\sin\psi = \dfrac{\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \sin\varphi - \varepsilon \sin\varphi\cos\varphi \qquad \cos\psi = \sqrt{\underbrace{1-\sin^2\varphi}_{\cos^2\varphi} + 2\varepsilon\sin^2\varphi\cos\varphi}$

$\cos\psi\, d\psi = \cos\varphi\, d\varphi - \varepsilon(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d\varphi \qquad = \cos\varphi\left(1+\varepsilon\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right) = \cos\varphi + \varepsilon\sin^2\varphi$

$d\psi = \dfrac{\cos\varphi + \varepsilon(1-2\cos^2\varphi)}{\cos\varphi + \varepsilon(1-\cos^2\varphi)}\, d\varphi = \dfrac{1+\varepsilon\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} - \varepsilon\cos\varphi}{1+\varepsilon\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}}\, d\varphi = [1-\varepsilon\cos\varphi]\, d\varphi$

$\sin\varphi = \sin\psi + \varepsilon\sin\psi\cos\psi \qquad d\varphi = d\psi(1+\varepsilon\cos\psi)$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\,(1+\varepsilon\cos\psi)^2\, d\psi \left(v_0 + u\cos\psi + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\cos\psi$

$\sin\psi\,(\cos\psi + 2\varepsilon\cos^2\psi)\, d\psi \left(v_0 + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} + u\cos\psi\right)$

$= f(v_0, u)$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\sin\psi\, d\psi = \frac{2}{3}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi = \sin^2\psi - \sin^2\cos\psi$
$= 1 - \frac{1}{3}$

$\int_u^\infty \cdots \quad - \int_{-\infty}^u$

$v_0 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi\, d\psi + 2\varepsilon\cos^2\psi\sin\psi\, d\psi}_{} + \cdots$

$v_0\left[\frac{1}{2} + \frac{2\varepsilon}{3}\right] +$

$\int_0^u v^3 \cdots$

$\frac{1}{4} \int_u^\infty v^4 \cdots - \int_{-\infty}^u v^4 \cdots = 0$

$\pi \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} = \pi \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$
$= \pi \cdot \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$

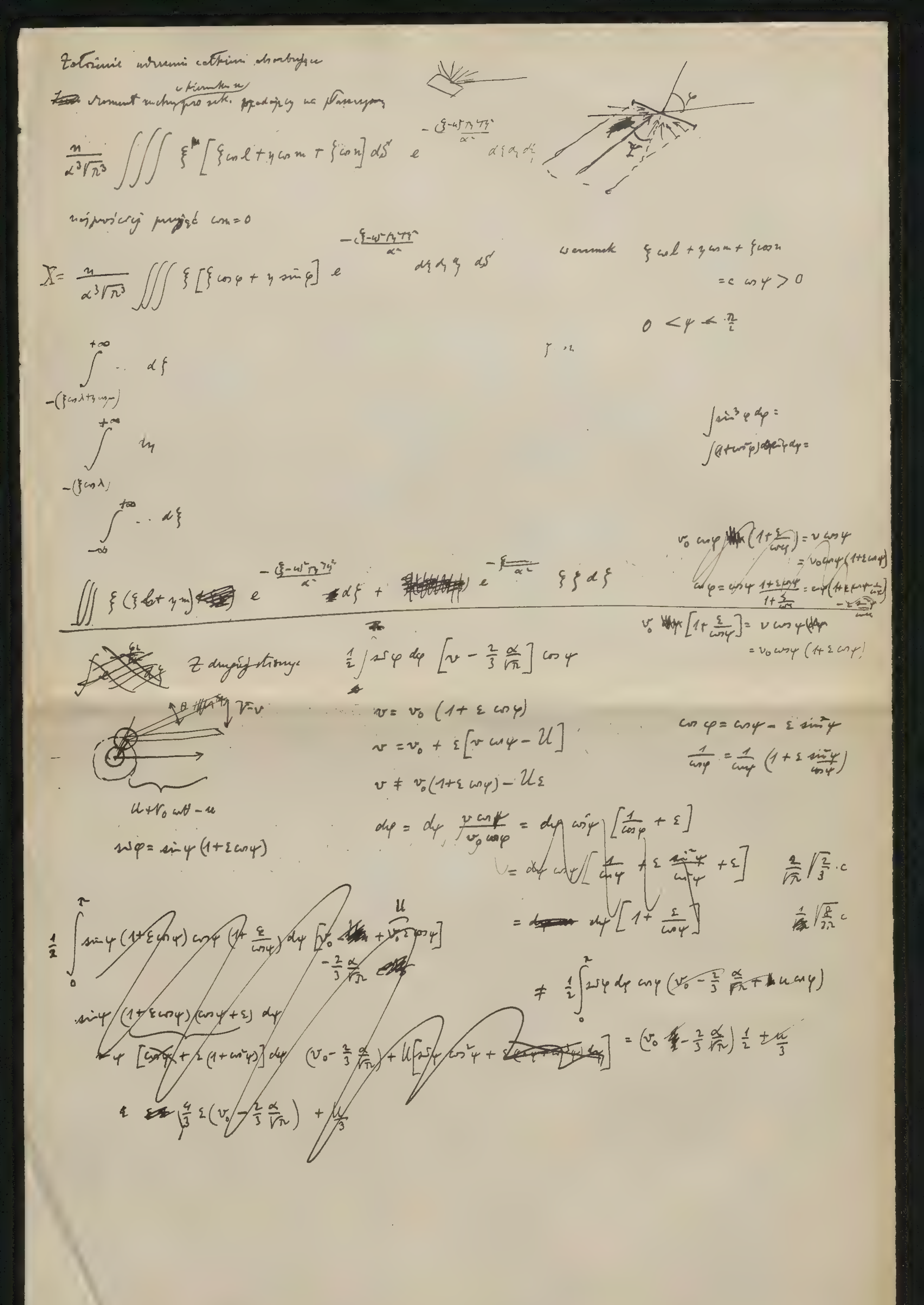
$2\pi\sin\psi\, d\varphi \cos\varphi = \dfrac{2\pi\sin 2\varphi\, d2\varphi}{4}$

$4\pi \cdot \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

$4\pi\left\{\dfrac{\frac{\alpha^4}{2} + \frac{2\alpha^4}{9\sqrt{\pi}} \frac{1}{4}\sqrt{\pi}}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\right\} u = \pi \cdot \frac{11}{9}\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$

$\underbrace{\frac{11}{9} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}}}$

$\pi \cdot \frac{11}{9}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$



$$\frac{n}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}\iiint \xi^2\left[\xi\cos l+\eta\cos m+\zeta\cos n\right] d\zeta\; e^{-\frac{(\xi-w)^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

najprościej przyjąć $\cos n = 0$

$$X=\frac{n}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}\iiint \xi\left[\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi\right] e^{-\frac{(\xi-w)^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

warunek $\xi\cos l+\eta\cos m+\zeta\cos n = c\cos\psi > 0$

$0<\psi<\frac{\pi}{2}$

$\int\sin^3\varphi\, d\varphi =$

Z drugiej strony $\frac{1}{2}\int\sin\varphi\, d\varphi\left[v-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right]\cos\varphi$

$v = v_0(1+\varepsilon\cos\psi)$

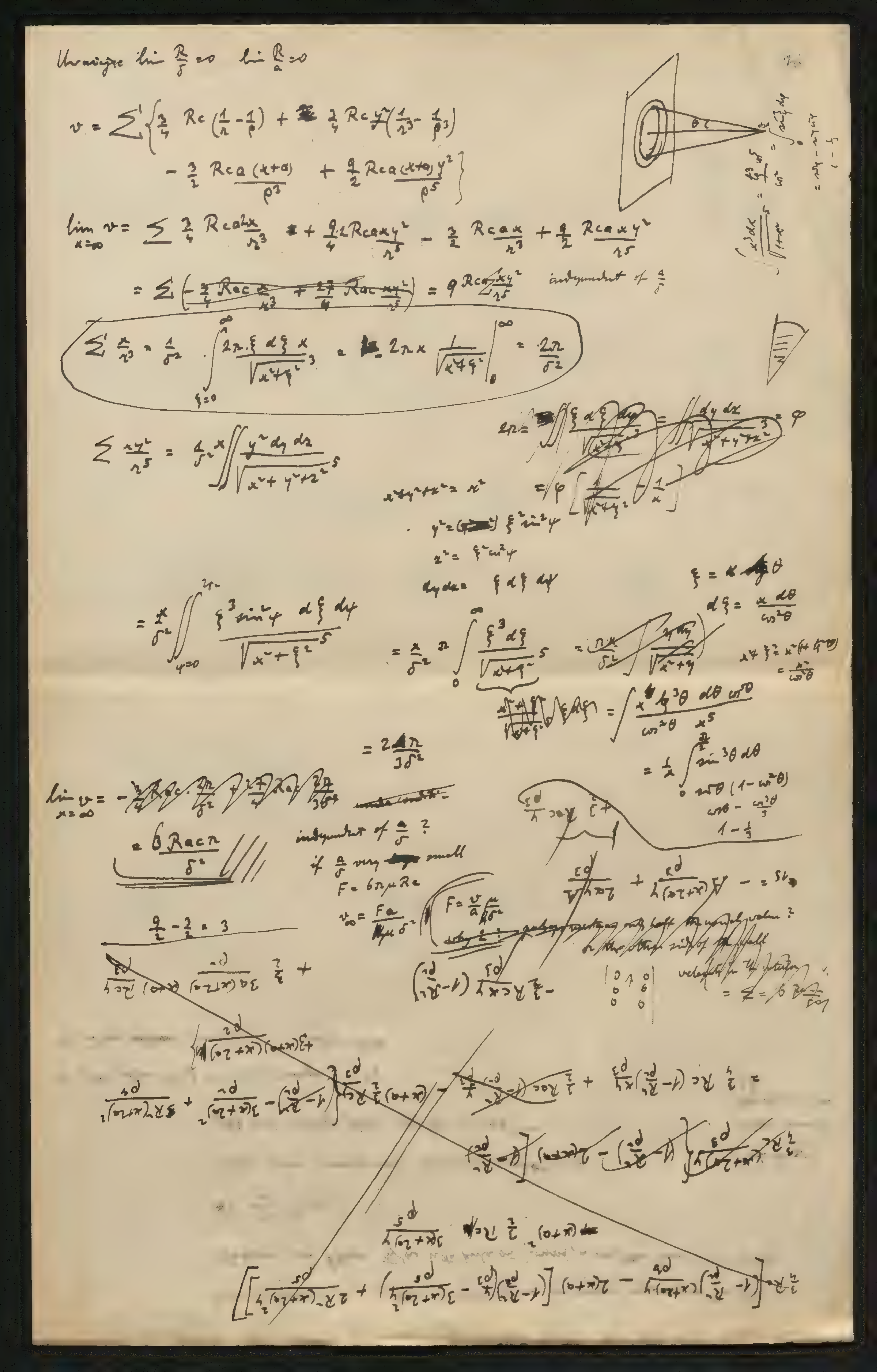
$v = v_0+\varepsilon\left[v\cos\psi - U\right]$

$\cos\varphi=\cos\psi-\varepsilon\sin^2\psi$

$\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{1}{\cos\psi}\left(1+\varepsilon\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\right)$

$\sin\varphi=\sin\psi(1+\varepsilon\cos\psi)$

$= \left(v_0-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{1}{2}+\frac{u}{3}$



Voraussetzung $\lim \frac{R}{\delta} = 0 \quad \lim \frac{R}{a} = 0$

$$v = \sum{}' \left\{ \frac{3}{4} Rc \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{3}{4} Rc\, y^2 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3} \right) - \frac{3}{2} Rca \frac{(x+a)}{\rho^3} + \frac{9}{2} Rca \frac{(x+a) y^2}{\rho^5} \right\}$$

$$\lim_{x=\infty} v = \sum \frac{3}{4} Rca^2 \frac{x}{r^3} + \frac{9}{4} 2 Rca \frac{x y^2}{r^5} - \frac{3}{2} Rca \frac{x}{r^3} + \frac{9}{2} Rca \frac{x y^2}{r^5}$$

$$= \sum \left( -\frac{3}{4} Rac \frac{x}{r^3} + \frac{27}{4} Rac \frac{x y^2}{r^5} \right) = 9 Rca \sum \frac{x y^2}{r^5}$$ independent of $\frac{a}{\delta}$

$$\sum{}' \frac{x}{r^3} = \frac{1}{\delta^2} \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{2\pi \xi\, d\xi\, x}{\sqrt{x^2+\xi^2}^3} = 2\pi x \left. \frac{1}{\sqrt{x^2+\xi^2}} \right|_0^\infty = \frac{2\pi}{\delta^2}$$

$$\sum \frac{x y^2}{r^5} = \frac{1}{\delta^2} x \iint \frac{y^2\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

$x^2+y^2+z^2 = r^2$

$y^2 = \xi^2 \sin^2\psi$

$z^2 = \xi^2 \cos^2\psi$

$dy\, dz = \xi\, d\xi\, d\psi$

$$= \frac{x}{\delta^2} \iint_{\psi=0}^{2\pi} \frac{\xi^3 \sin^2\psi\, d\xi\, d\psi}{\sqrt{x^2+\xi^2}^5} = \frac{x}{\delta^2} \pi \int_0^\infty \frac{\xi^3\, d\xi}{\sqrt{x^2+\xi^2}^5}$$

$\xi = x \operatorname{tg}\theta \qquad d\xi = \frac{x\, d\theta}{\cos^2\theta} \qquad x^2+\xi^2 = x^2(1+\operatorname{tg}^2\theta) = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$

$$\int \frac{\xi^3 d\xi}{\sqrt{x^2+\xi^2}^5} = \int \frac{x^4 \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta\, \cos^5\theta}{\cos^2\theta\ x^5} = \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$$

$\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)$

$\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}$

$1 - \frac{1}{3}$

$$= \frac{2\pi}{3\delta^2}$$

$$\lim_{x=\infty} v = \frac{6 Rac\pi}{\delta^2}$$

independent of $\frac{a}{\delta}$ ?

if $\frac{a}{\delta}$ very small

$F = 6\pi\mu R c$

$v_\infty = \frac{Fa}{\mu \delta^2}$

$F = \frac{v}{a} \frac{\mu}{\delta^2}$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$

o 5

o 4

o 3

o 2

o 1

Ruch wyjątkowy (gdy wszystkie kule równolegle się poruszają) = superpozycji n ruchów składowych przy których tylko n-ta kula się porusza, a wszystkie inne w spoczynku

$$\vartheta = \sum_n \vartheta_{0,0,0,1,n}$$

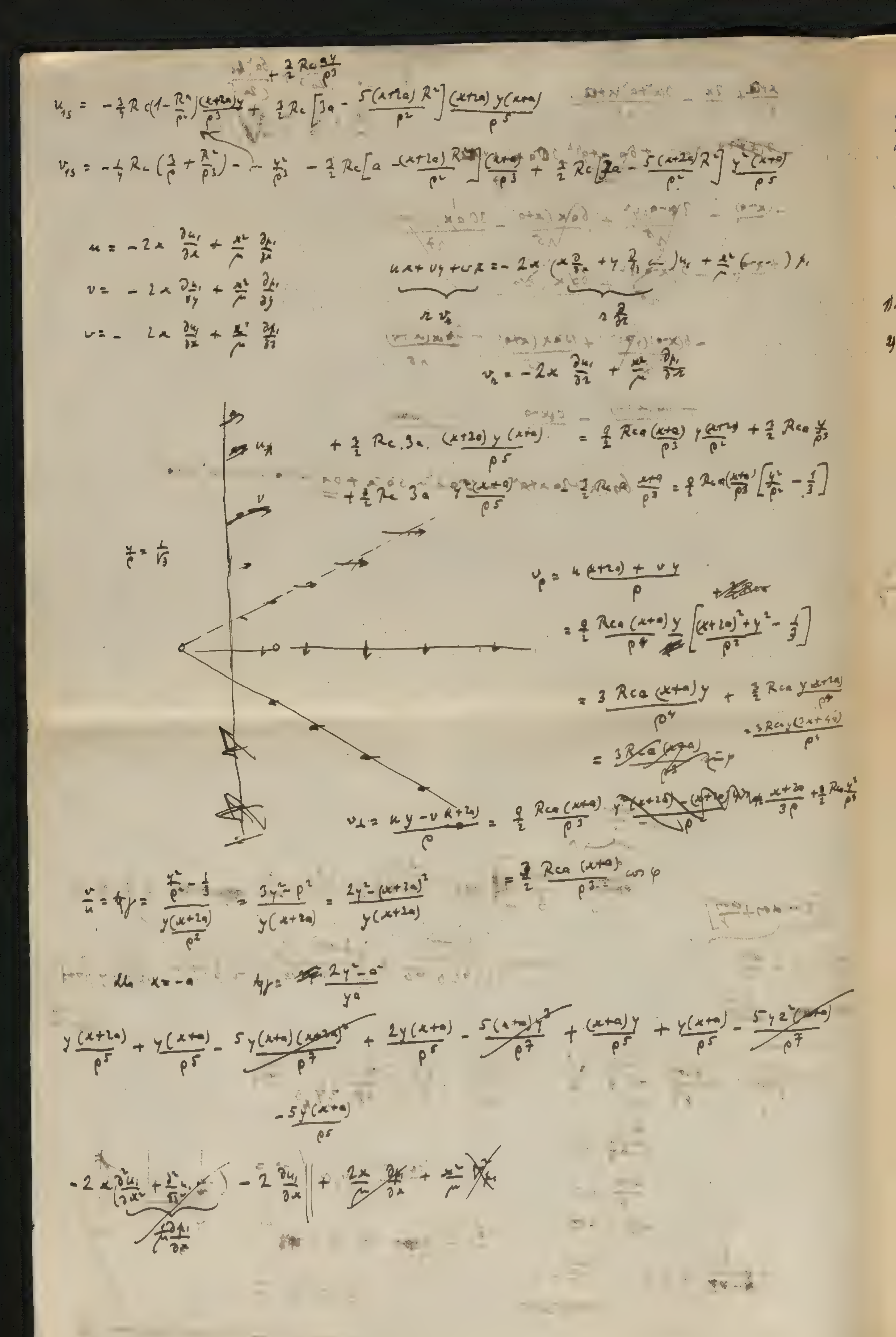
Chodzi zatem o rozwiązanie zadania pierwotnego:

Jak ruch powstaje jeśli wszystkie z wyjątkiem jednej są w spoczynku

[illegible]

1). Jedna jedyna [illegible] która się porusza $\int \frac{\ }{c_q} u_1$

2). Druga ~~[illegible]~~ nieruchoma i ponadto [illegible]



$$u_{15} = -\frac{3}{4} R c \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) \frac{(x+2a)y}{\rho^3} + \frac{3}{2} R c \left[3a - \frac{5(x+2a)R^2}{\rho^2}\right] \frac{(x+2a)\,y\,(x+a)}{\rho^5} + \frac{3}{2} R c a \frac{y}{\rho^3}$$

$$v_{15} = -\frac{1}{4} R c \left(\frac{3}{\rho} + \frac{R^2}{\rho^3}\right) - \frac{y^2}{\rho^3} - \frac{3}{2} R c \left[a - \frac{(x+2a)R^2}{\rho^2}\right] \frac{(x+a)}{\rho^3} + \frac{3}{2} R c \left[3a - \frac{5(x+2a)}{\rho^2} R^2\right] \frac{y^2 (x+a)}{\rho^5}$$

$$u = -2x \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$v = -2x \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial y}$$

$$w = -2x \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial z}$$

$$ux + vy + wz = -2x \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \dots\right) u_1 + \frac{x^2}{\mu}(\dots)\, p_1$$

$$v_r = -2x \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial r}$$

$$+ \frac{3}{2} R c\, 3a \frac{(x+2a)\,y\,(x+a)}{\rho^5} = \frac{9}{2} R c a \frac{(x+a)}{\rho^3} \frac{y(x+2a)}{\rho^2} + \frac{3}{2} R c a \frac{y}{\rho^3}$$

$$= + \frac{3}{2} R c\, 3a \frac{y^2 (x+a)}{\rho^5} - \frac{3}{2} R c a \frac{x+a}{\rho^3} = \frac{9}{2} R c a \frac{(x+a)}{\rho^3} \left[\frac{y^2}{\rho^2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$\frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$v_\rho = \frac{u(x+2a) + v y}{\rho}$$

$$= \frac{9}{2} \frac{R c a (x+a)}{\rho^4} y \left[\frac{(x+2a)^2 + y^2}{\rho^2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= 3 \frac{R c a (x+a) y}{\rho^4} + \frac{3}{2} R c a \frac{y(x+a)}{\rho^4} = \frac{3 R c a\, y (3x+4a)}{\rho^4}$$

$$v_\perp = \frac{u y - v(x+2a)}{\rho} = \frac{9}{2} \frac{R c a (x+a)}{\rho^3} \dots \frac{x+2a}{3\rho} + \frac{3}{2} R c a \frac{y^2}{\rho^3}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{R c a (x+a)}{\rho^{2}} \cos\varphi$$

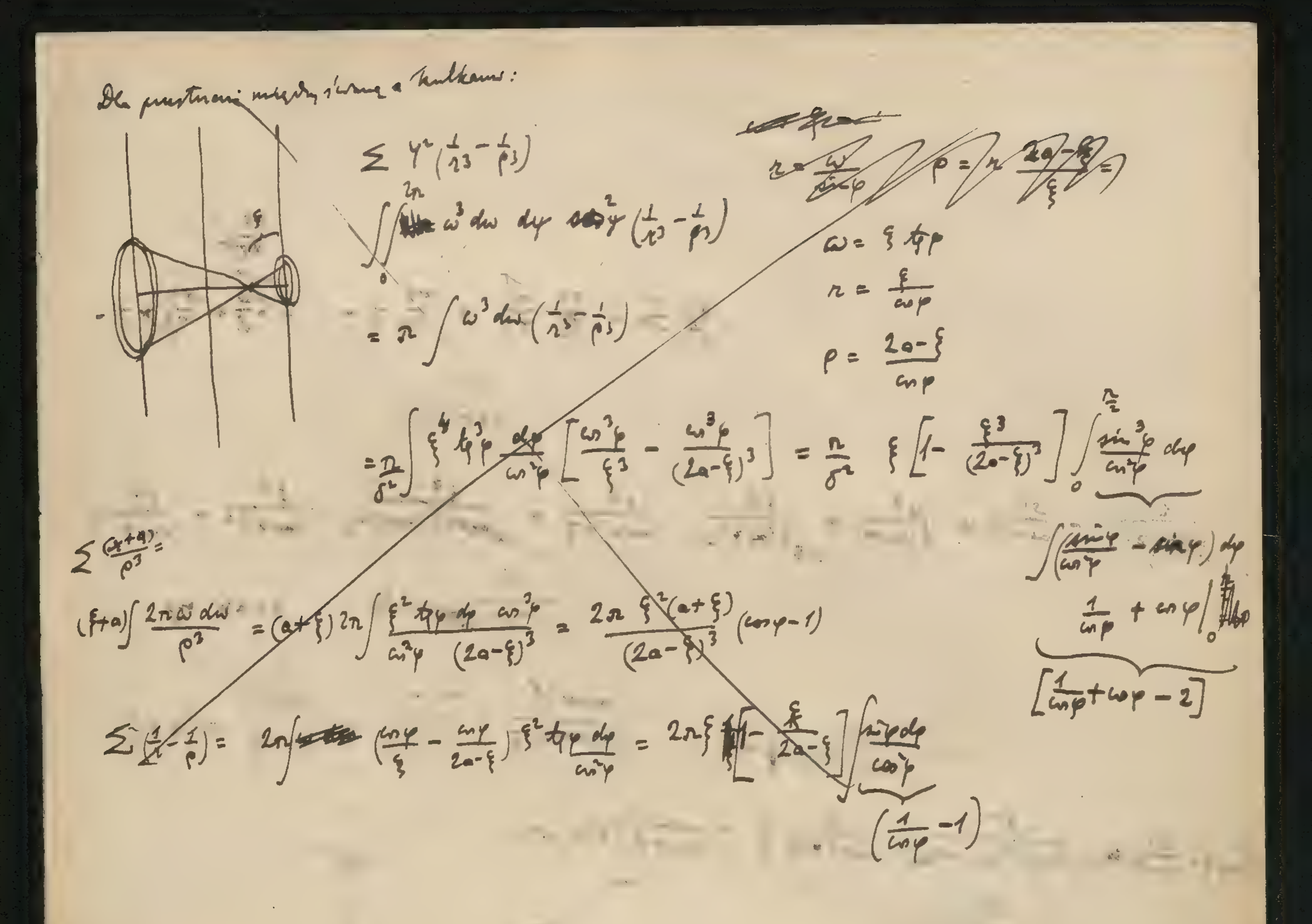
$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{y^2}{\rho^2} - \frac{1}{3}}{\frac{y(x+2a)}{\rho^2}} = \frac{3y^2 - \rho^2}{y(x+2a)} = \frac{2y^2 - (x+2a)^2}{y(x+2a)}$$

dla $x = -a$: $\operatorname{tg}\psi = \frac{2y^2 - a^2}{ya}$

$$y\frac{(x+2a)}{\rho^5} + \frac{y(x+a)}{\rho^5} - \frac{5y(x+a)(x+2a)^2}{\rho^7} + \frac{2y(x+a)}{\rho^5} - \frac{5(x+a)y^3}{\rho^7} + \frac{(x+a)y}{\rho^5} + \frac{y(x+a)}{\rho^5} - \frac{5yz^2(x+a)}{\rho^7}$$

$$-\frac{5y(x+a)}{\rho^5}$$

$$-2x\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \dots\right) - 2\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{2x}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu}\nabla^2 p_1$$



Dla przestrzeni między ścianą a kulkami:

$u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$ || $\overset{q}{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}$  $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$

$\nabla^2 u = \frac{\partial p}{\partial x}$ =

$\nabla^2 v = \frac{\partial p}{\partial y}$

$\nabla^2 w = \frac{\partial p}{\partial z}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\rho}$  $\frac{\partial u}{\partial y} = +\frac{y}{\rho^3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial\rho}$  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{3y^2}{\rho^5}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{3y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^3}\frac{\partial^3\psi}{\partial\rho^3}$

$\nabla^2 u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial\rho} - \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3\psi}{\partial\rho^3}$

$F_t = -p_{xx}\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a} + p_{xy}\frac{xy}{a\sqrt{\ }} + p_{xz}\frac{xz}{a\sqrt{\ }}$

$= \frac{-p_{xx}(a^2-x^2) + p_{xy}xy + p_{xz}xz}{a\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x(xp_{xx}+yp_{xy}+zp_{xz}) - a^2 p_{xx}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$

$\frac{(xp_{xx}+\dots)}{a} = \frac{1}{a^2}\Big[-a^2 p + \mu\big[x(r\frac{\partial}{\partial r}-1)u + y(r\frac{\partial}{\partial r}-1)v + z(r\frac{\partial}{\partial r}-1)w\big]$

$+ \mu\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{r\frac{\partial}{\partial r}}(xu+yv+zw)\Big]$

$F_t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}\Big\{-pxa^2\ \mu x\big[x(r\frac{\partial}{\partial r}-1)u + y(r\frac{\partial}{\partial r}-1)v + z(r\frac{\partial}{\partial r}-1)w\big] + \mu x r\frac{\partial}{\partial r}(ux+vy+wz)$

$+ a^2 px - a^2\mu(r\frac{\partial}{\partial r}-1)u - a^2\mu\frac{\partial}{\partial x}(ux+vy\dots)\Big\}$

$= \frac{\mu}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}\Big\{ \dots$

$+ r x\frac{\partial}{\partial r}(ux+vy+wz) - a^2\frac{\partial}{\partial x}(ux+v\dots)\Big\}$

$ux+vy+wz = \frac{2\alpha x}{r} - \frac{2\mathcal{D}x}{r^3} + Ux = \cos\theta\left[2\alpha - \frac{2\mathcal{D}}{r^2} + Ur\right]$

$\frac{\partial}{\partial r}(ux+vy+wz) = \cos\theta\left[U + \frac{4\mathcal{D}}{r^3}\right] = \frac{Ux}{a} + \frac{4\mathcal{D}x}{a^4}$

$\frac{\partial}{\partial x}(\quad) = \frac{2\alpha}{r} - \frac{2\alpha x^2}{r^3} - \frac{2\mathcal{D}}{r^3} + \frac{6\mathcal{D}x^2}{r^5} + U$

$u = \frac{\alpha}{r} + \frac{\mathcal{D}}{r^3} + \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{3\mathcal{D}}{r^3}\right)\cos^2\varphi + U$ || $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{3\mathcal{D}}{r^4} - \frac{\alpha x^2}{r^4} + \frac{9\mathcal{D}x^2}{r^6}$

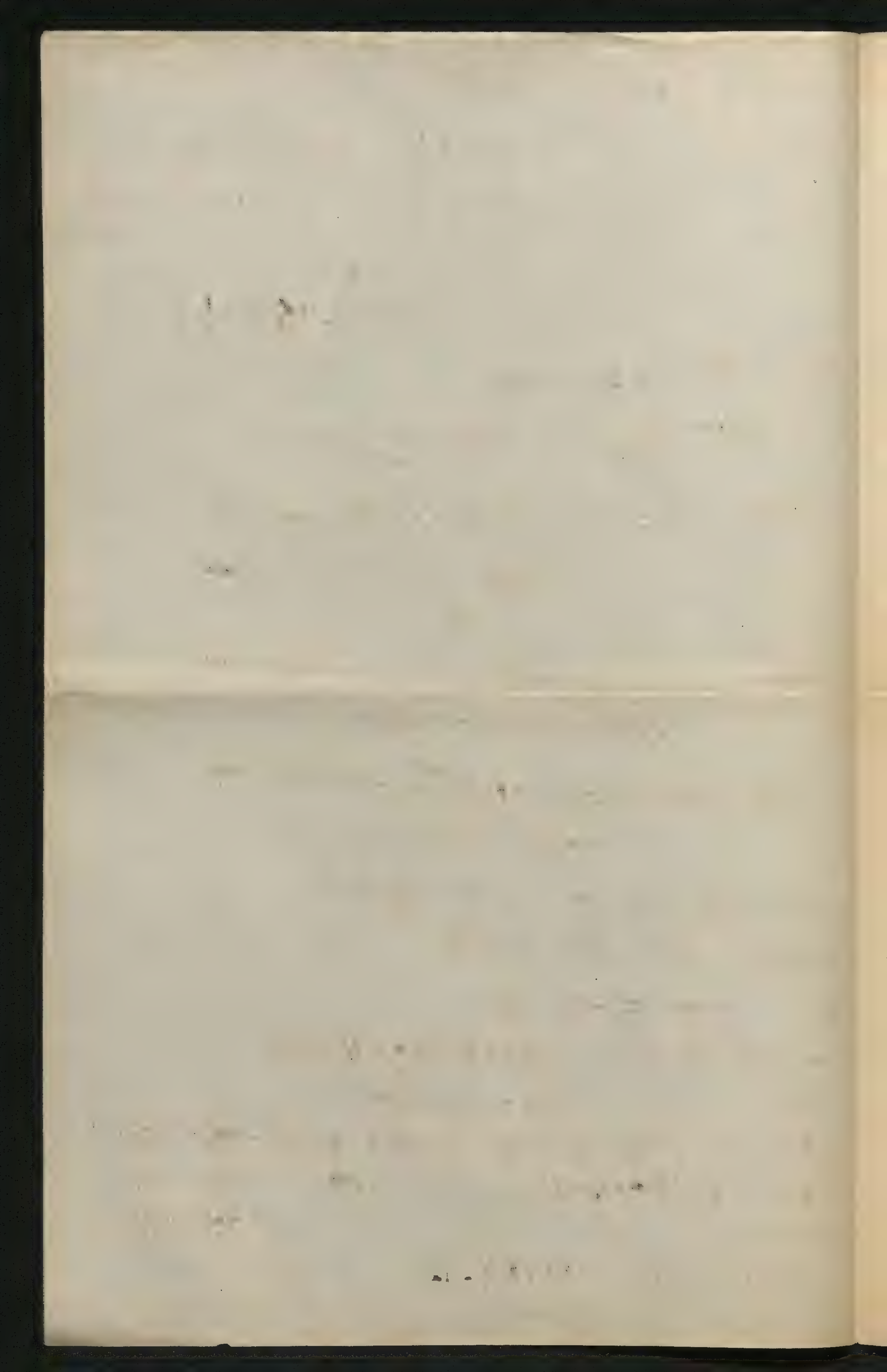
$v =$ || $\frac{\partial v}{\partial r} = \left(-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{9\mathcal{D}}{r^4}\right)\frac{xy}{r^2}$

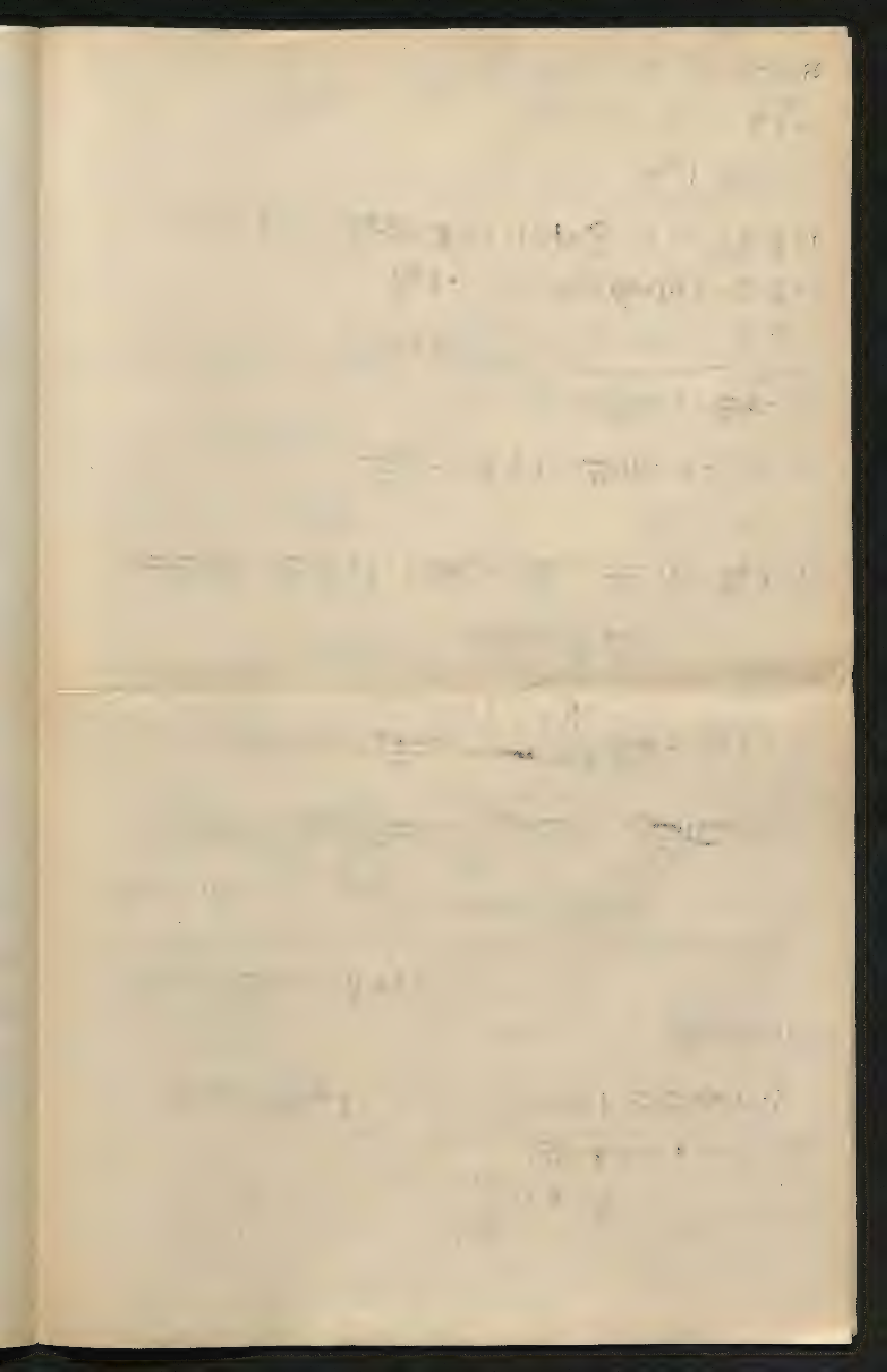
$(r\frac{\partial}{\partial r}-1)u = -\frac{\alpha}{r} - \frac{3\mathcal{D}}{r^3} - \frac{\alpha x^2}{r^3} + \frac{9\mathcal{D}x^2}{r^5} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\mathcal{D}}{r^3} - \frac{\alpha x^2}{r^3} + \frac{3\mathcal{D}x^2}{r^5} = -\frac{2\alpha}{r} - \frac{4\mathcal{D}}{r^3} - \frac{2\alpha x^2}{r^3} + \frac{12\mathcal{D}x^2}{r^5} - U$ | $x$

$(r\frac{\partial}{\partial r}-1)v = \left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{9\mathcal{D}}{r^3}\right) - \frac{\alpha}{r} + \frac{3\mathcal{D}}{r^3})\frac{xy}{r^2} =$  $= -\frac{2\alpha xy}{r^3} + \frac{12\mathcal{D}xy}{r^5}$ | $y$

$(r\frac{\partial}{\partial r}-1)w =$  $-\frac{2\alpha xz}{r^3} + \frac{12\mathcal{D}xz}{r^5}$ | $z$

$x(\quad)u + y(\quad)v + z(\quad)w = -\frac{4\alpha x}{r} + \frac{8\mathcal{D}x}{r^3} - Ux$





$$u = \frac{3}{4} Rc \frac{xy}{r^3} - \frac{3}{4} R^3 c \frac{xy}{r^5}$$

$$v = \frac{1}{4} \frac{Rc}{r} + \frac{1}{4} \frac{R^3 c}{r^3} + \frac{3}{4} Rc \frac{y^2}{r^3} - \frac{3}{4} \frac{R^3 c y^2}{r^5}$$

$$w = \frac{3}{4} Rc \frac{yz}{r^3} - \frac{3}{4} R^3 c \frac{yz}{r^5}$$

$-\frac{3}{?}$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{3}{4} Rc \left\{ \frac{z}{r^3} - \ldots \right\} - \frac{3}{4} R^3 c \left\{ \ldots \right\} + \frac{3}{4} \frac{Rc z}{r^3} + \ldots = \frac{3}{2} \frac{Rc z}{r^3}$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \ldots = 0$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3}{2} \frac{Rc y}{r^3}$$

---

$$u_{1s} = -u_p + \mathcal{D} \frac{(x+2a) y (x+a)}{\rho^5}$$

$$v_{1s} = -v_p + \mathcal{D} \frac{y^2 (x+a)}{\rho^5} - \frac{3}{2} Rc \frac{x+a}{\rho^3} \left[ a - \frac{R^2 (x+2a)}{\rho^2} \right]$$

$$w_{1s} = -w_p + \mathcal{D} \frac{(x+a) yz}{\rho^5}$$

$$\xi = -\frac{3}{2} \frac{Rc z}{\rho^3} + \mathcal{B} \left\{ \frac{(x+a) z}{\rho^5} - \ldots + \ldots \right\} + \frac{3}{2} Rc \left\{ -\frac{3(x+a) z a}{\rho^5} + \frac{5R^2 (x+a)(x+2a) z}{\rho^7} \right\}$$

$$+ \frac{yz(x+a)}{\rho^5} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y} - \frac{y^2(x+a)}{\rho^5} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z}$$

$$\xi = -\frac{3}{2} \frac{Rc z}{\rho^3} + \frac{(x+a) z}{\rho^5} \frac{3}{2} Rc \left\{ 3a - \frac{5(x+2a) R^2}{\rho^2} - 3a + \frac{5R^2 (x+2a)}{\rho^2} \right\}$$

$$\eta = -\mathcal{B} \frac{(x+2a) y (x+a) 5z}{\rho^5} + 5\mathcal{D} \frac{(x+a) yz (x+2a)}{\rho^5} + y \frac{(x+a)(x+2a)}{\rho^5} \cdot \frac{z(x+2a) z}{\rho^2} - \frac{yz(x+a)}{\rho^5} \frac{(x+2a)^2}{\rho^2}$$

$$- \frac{yz}{\rho^5} \frac{3}{2} Rc \left[ 3a - \frac{5(x+2a) R^2}{\rho^2} \right] \qquad \frac{3}{2} Rc \, 5R^2 \qquad + \frac{(x+a) yz}{\rho^5} \cdot \frac{3}{2} Rc \frac{5R^2}{\rho^2}$$

---

$$\eta = \frac{3}{2} Rc \frac{yz}{\rho^5} \left\{ -3a + \frac{5(x+2a) R^2}{\rho^2} + \frac{5(x+a) R^2}{\rho^2} \right\}$$

$$\zeta = + \frac{3}{2} \frac{Rc (x+2a)}{\rho^3}$$

$$X = \frac{3}{2} Rc^2 \left( \frac{x+2a}{\rho^3} - \frac{x}{r^3} \right) = \ldots$$

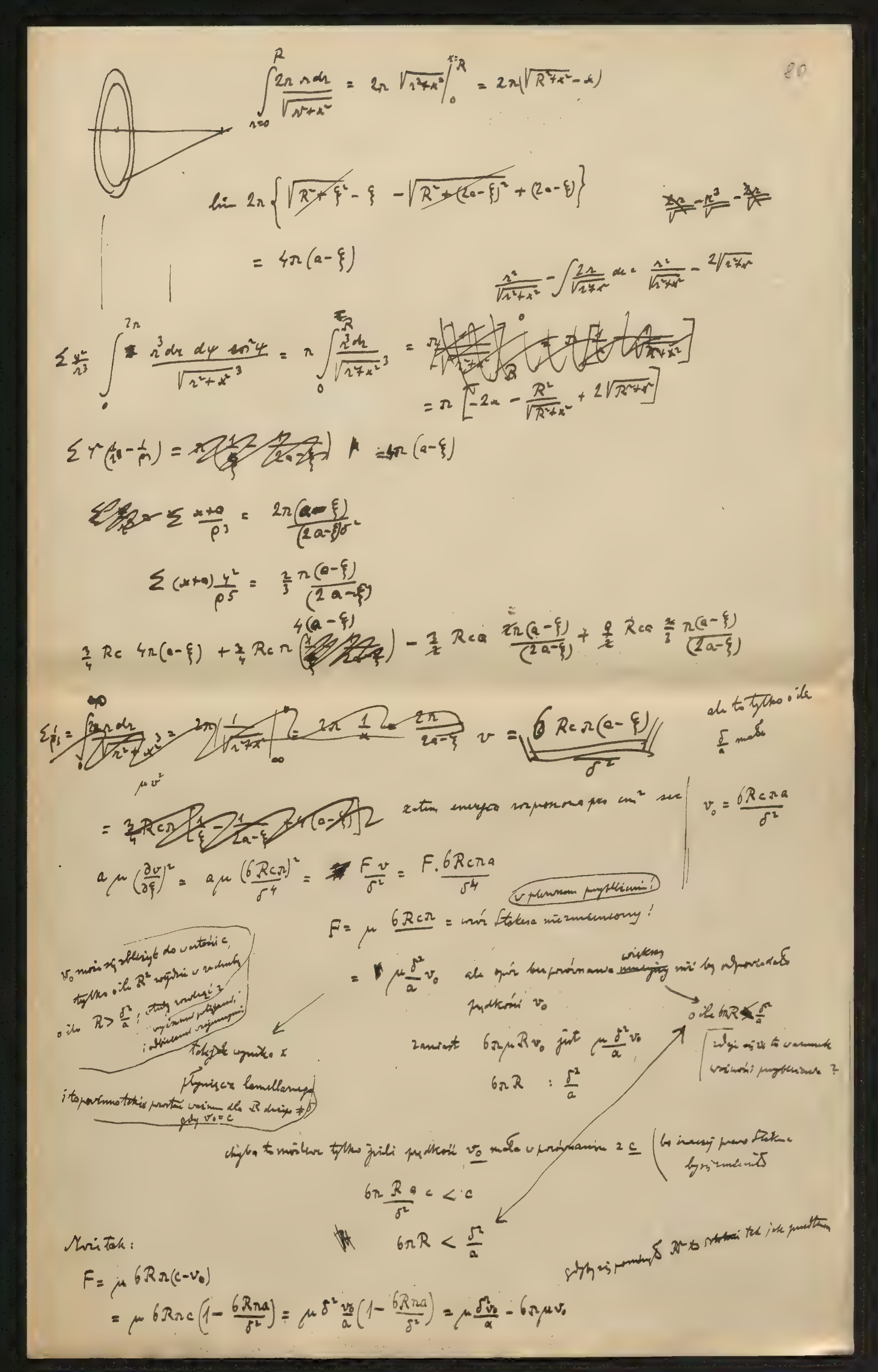
$$\mu \nabla^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3}{2} Rc \mu y \left[ \frac{x}{r^5} - \frac{x+2a}{\rho^5} \right]$$

$$\frac{X}{\mu \nabla^2 u} = \frac{c}{y} \frac{\frac{x+2a}{\rho^3} - \frac{x}{r^3}}{\frac{x+2a}{\rho^5} - \frac{x}{r^5}}$$

$$\frac{Rc^2}{r^2} : \frac{Rc \mu}{r^3}$$

$$\rho c : \frac{\mu}{r}$$

$$r = \frac{\mu}{c \rho}$$





$$\int_{r=0}^{R} \frac{2\pi r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = 2\pi\sqrt{r^2+x^2}\Big|_0^{r=R} = 2\pi\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

$$\lim 2\pi\left\{\sqrt{R^2+\xi^2}-\xi-\sqrt{R^2+(2a-\xi)^2}+(2a-\xi)\right\}$$

$$= 4\pi(a-\xi)$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2+x^2}} - \int\frac{2r}{\sqrt{r^2+x^2}}\,dr = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+x^2}} - 2\sqrt{r^2+x^2}$$

$$\sum\frac{y^2}{r^3} \int_0^{2\pi} \frac{r^3\,dr\,d\varphi\,\sin^2\varphi}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,3}} = \pi\int_0^R \frac{r^3\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,3}} = \pi\left[-2x - \frac{R^2}{\sqrt{R^2+x^2}} + 2\sqrt{R^2+x^2}\right]$$

$$\sum r\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) = 4\pi(a-\xi)$$

$$\sum\frac{x+a}{\rho^3} = \frac{2\pi(a-\xi)}{(2a-\xi)\delta^2}$$

$$\sum(x+a)\frac{y^2}{\rho^5} = \frac{2}{3}\pi\frac{(a-\xi)}{(2a-\xi)}$$

$$\frac{3}{4}Rc\,4\pi(a-\xi) + \frac{3}{4}Rc\pi\,[\text{illegible}] - \frac{3}{2}Rca\,\frac{2\pi(a-\xi)}{(2a-\xi)} + \frac{9}{2}Rca\,\frac{2}{3}\frac{\pi(a-\xi)}{(2a-\xi)}$$

$$\sum\frac{1}{\rho_1} = \int\frac{2\pi r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,3}} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\Big|_\infty^0 = 2\pi\frac{1}{x} = \frac{2\pi}{2a-\xi} \qquad v = \frac{6Rc\pi(a-\xi)}{\delta^2}$$

ale to tylko o ile $\frac{\xi}{a}$ małe

$$v_0 = \frac{6Rc\pi a}{\delta^2}$$

zatem energia rozproszona per cm² sec

$$a\mu\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2 = a\mu\left(\frac{6Rc\pi}{\delta^2}\right)^2 = \frac{Fv}{\delta^2} = F\frac{6Rc\pi a}{\delta^4}$$

(w pierwszym przybliżeniu!)

$F = \mu\,6Rc\pi$ = wzór Stokesa niezmieniony!

$= \mu\frac{\delta^2}{a}v_0$ ale opór bez porównania większy niż by odpowiadało prędkości $v_0$

zamiast $6\pi\mu R v_0$ jest $\mu\frac{\delta^2}{a}v_0$

$6\pi R \;:\; \frac{\delta^2}{a}$

o ile $6\pi R < \frac{\delta^2}{a}$ — kiedy zaś to warunek właściwości przybliżenia?

$v_0$ może się zbliżyć do wartości c, tylko o ile $R^2$ wejdzie w rachunek, o ile $R > \frac{\delta^2}{a}$; [illegible] wyższe przybliżenia, i obliczenia [illegible]

Podobne wyniki z płynięcia lamellarnego i to prawdopodobnie [illegible] wzór dla R dużego gdy $v_0 = c$

chyba to możliwe tylko jeśli prędkość $v_0$ mała w porównaniu z c (bo inaczej prawo Stokesa by się zmieniło

$$6\pi\frac{Ra}{\delta^2}c < c$$

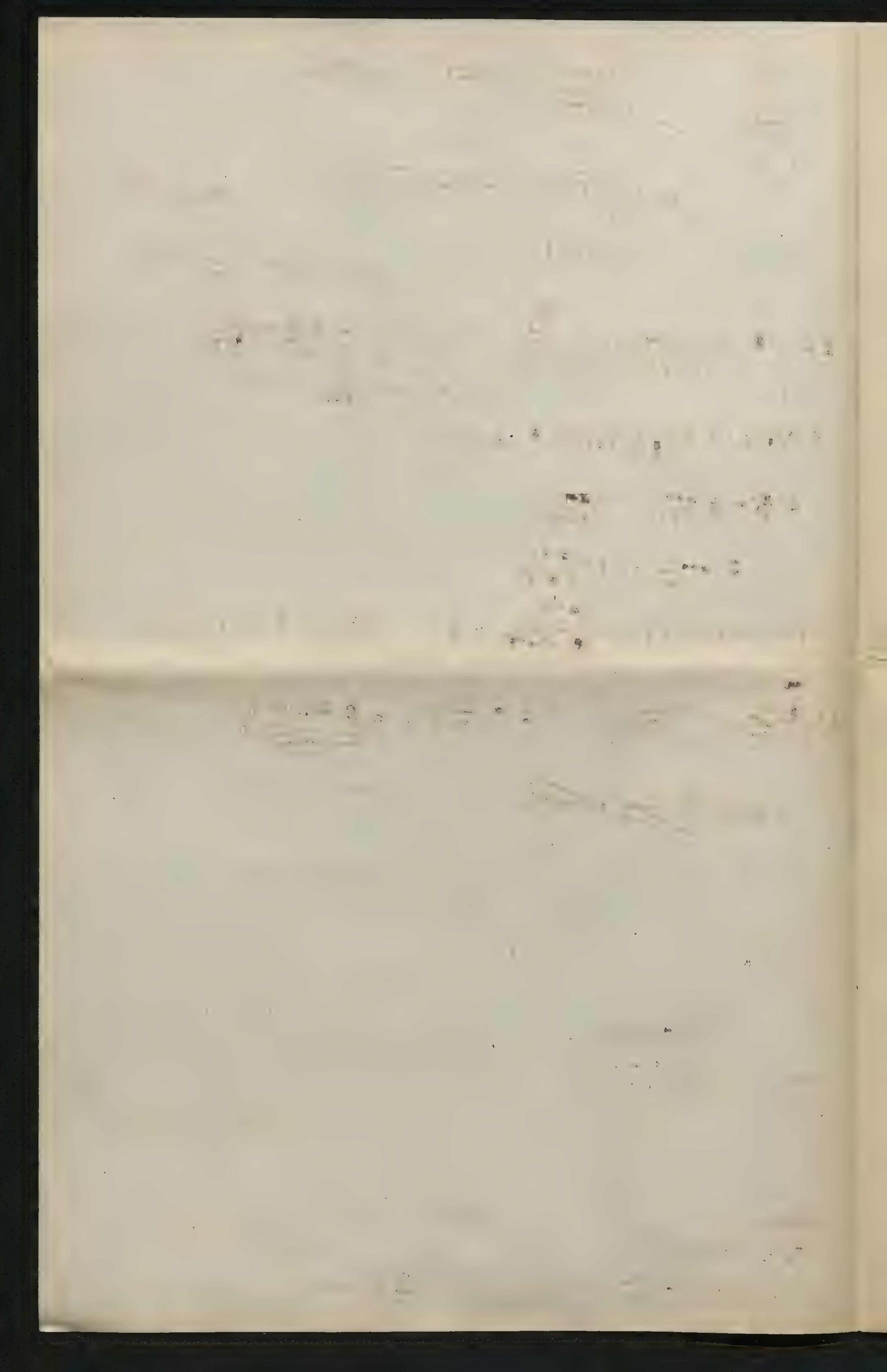
$$6\pi R < \frac{\delta^2}{a}$$

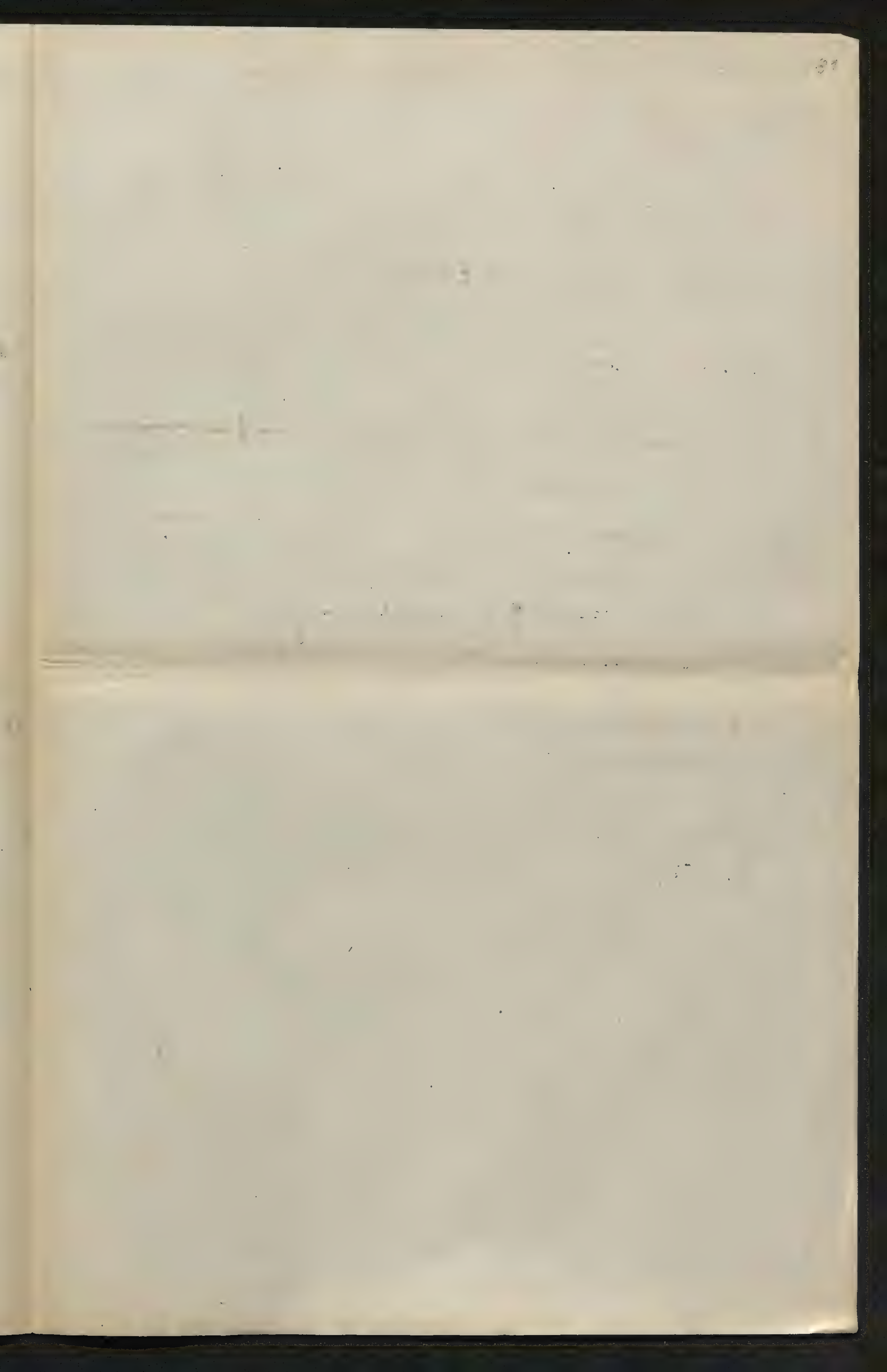
gdyby się powiększało R to [illegible]

Może tak:

$$F = \mu\,6R\pi(c-v_0)$$

$$= \mu\,6R\pi c\left(1-\frac{6R\pi a}{\delta^2}\right) = \mu\delta^2\frac{v_0}{a}\left(1-\frac{6R\pi a}{\delta^2}\right) = \mu\frac{\delta^2 v_0}{a} - 6\pi\mu v_0$$





O ile tylko $\frac{\delta}{x}$ małe można uważać — ale $\underline{\delta}$ musi być tego samego rzędu co $\underline{a}$

$$\frac{?}{?}\sum \frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{\delta^2}\int_0^\infty \frac{2\pi\,\xi\,d\xi}{\sqrt{(x+2a)^2+\xi^2}^{\,3}} = \frac{2\pi}{\delta^2(x+2a)}$$

$$\sum \frac{y^2}{\rho^5} = \frac{2\pi}{3\delta^2(x+2a)}$$

więc w każdym razie znikają wtedy dwa ostatnie i pozostają dla tych odległości tylko

$$v = \frac{3}{4}Rc\left[\sum\underbrace{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right)}_{\frac{2ax}{r^3}} + \sum \underbrace{y^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)}_{6\frac{axy^2}{r^5}}\right]$$

$$\frac{4a\pi}{\delta^2} \qquad 6\cdot\frac{2}{3}\frac{a\pi}{\delta^2} \qquad \text{stąd} = \frac{6\pi a R}{\delta^2}$$

więc jest to ważne dla $x \gg \delta$

W każdym razie zatem w wielkich odległościach $x \gg \delta$ będzie ważne i o ile $\frac{R}{\delta}$ małe (bo inaczej odbicia!)

$$v_\infty = \frac{6\pi Rca}{\delta^2}$$

z drugiej strony w każdym razie dla dostatecznie małych $R$, to znaczy o ile $v_0 < c$, musi być przybliżenie

$$F = 6\pi\mu Rc$$ bez względu na stosunek $a : \delta$

zatem mamy $F = \mu\delta^2\frac{v_\infty}{a}$ tak jak gdyby ciecz płynęła kapilarnie

ten sam wzór także ważny być musi dla $2R = \delta$ (jeżeli $\frac{R}{a}$ ~~[illegible]~~ małe) inaczej przystoby $\frac{v_\infty}{a - Rc}$

więc pod tym samym zastrzeżeniem (że $v_0 < c$) można $v_\infty$ obliczać wychodząc z siły $F$ wziętej rozumowanej w sposób ścisły zgodnie z Helmholtzem

---

W razie gdy $\delta = 2R$ $\quad \frac{R}{a}$ małe

$$F = \mu\frac{\delta^2 c}{a} = \frac{4\mu R^2 c}{a}$$ zamiast normalnego oporu $6\pi\mu Rc$

zmniejszony opór w stosunku $\frac{2R}{3\pi a}$

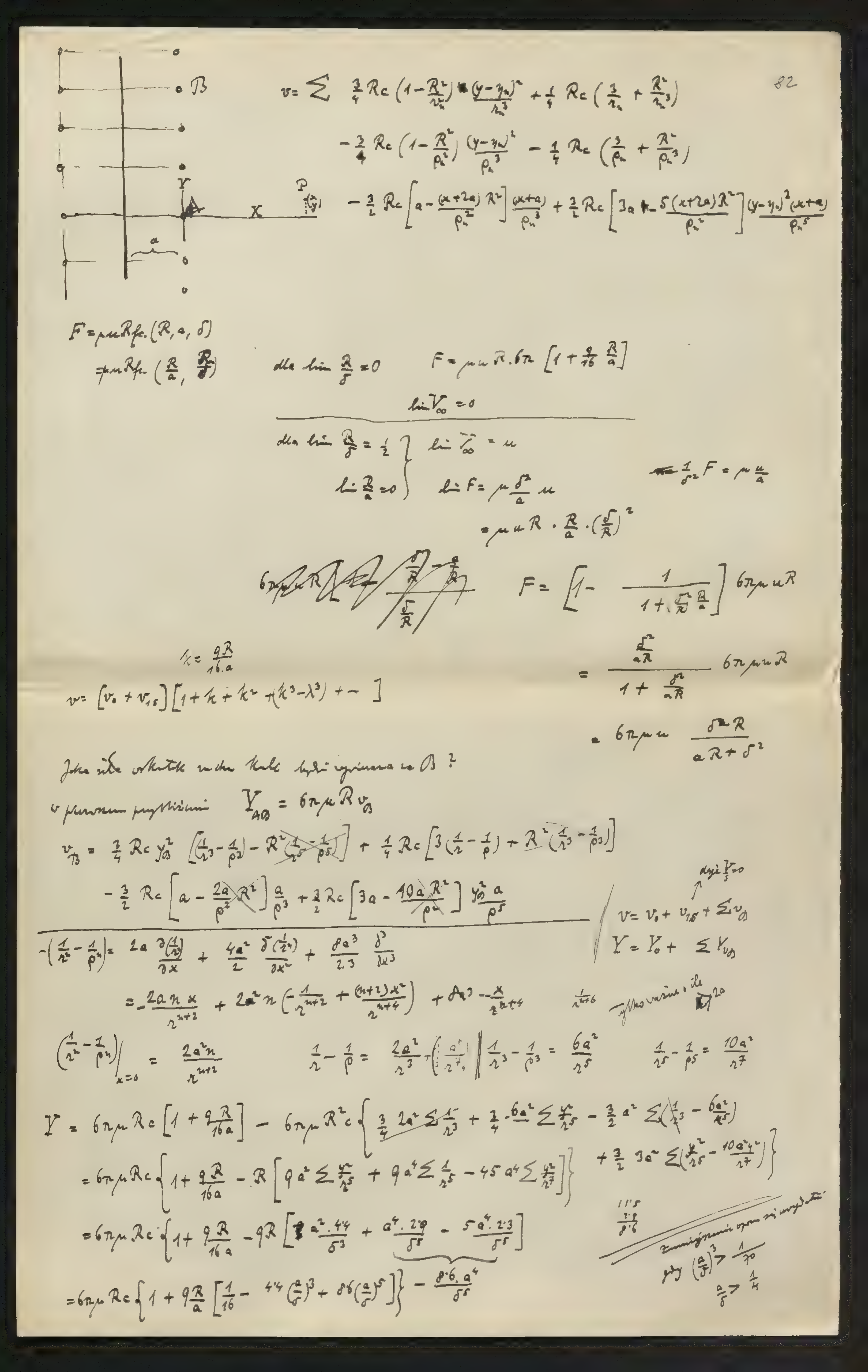
---

$$F = 6\pi\mu R(c - v_0) \qquad v_\infty = \frac{6\pi Rca}{\delta^2}$$

$$\frac{F}{v_\infty} = \frac{(c-v_0)\mu\,\delta^2}{ca}$$

$$F = \mu\frac{\delta^2 v_\infty}{a}\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$$

$$\frac{R^2}{l} : 6\pi a$$



82

$$v = \sum \frac{3}{4} Rc\left(1-\frac{R^2}{r_n^2}\right)\frac{(y-y_n)^2}{r_n^3} + \frac{1}{4} Rc\left(\frac{3}{r_n}+\frac{R^2}{r_n^3}\right)$$

$$-\frac{3}{4} Rc\left(1-\frac{R^2}{\rho_n^2}\right)\frac{(y-y_n)^2}{\rho_n^3} - \frac{1}{4} Rc\left(\frac{3}{\rho_n}+\frac{R^2}{\rho_n^3}\right)$$

$$-\frac{3}{2} Rc\left[a-\frac{(x+2a)R^2}{\rho_n^2}\right]\frac{(x+a)}{\rho_n^3} + \frac{3}{2} Rc\left[3a - \frac{5(x+2a)R^2}{\rho_n^2}\right]\frac{(y-y_n)^2(x+a)}{\rho_n^5}$$

$F = \mu u R\, fc.(R, a, \delta)$

$= \mu u R\, fc.\left(\frac{R}{a}, \frac{R}{\delta}\right)$

dla $\lim \frac{R}{\delta} = 0$ $\quad F = \mu u R . 6\pi \left[1 + \frac{9}{16}\frac{R}{a}\right]$

$\lim V_\infty = 0$

dla $\lim \frac{R}{\delta} = \frac{1}{2}$, $\lim \frac{R}{a} = 0$ $\quad \lim V_\infty = u$, $\quad \lim F = \mu \frac{\delta^2}{a} u$

$= \mu u R \cdot \frac{R}{a}\cdot\left(\frac{\delta}{R}\right)^2$

$\frac{1}{\delta^2} F = \mu \frac{u}{a}$

$$F = \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\delta^2}{R^2}\frac{R}{a}}\right] 6\pi\mu u R$$

$$= \frac{\frac{\delta^2}{aR}}{1 + \frac{\delta^2}{aR}}\, 6\pi\mu u R$$

$$= 6\pi\mu u \frac{\delta^2 R}{aR + \delta^2}$$

$k = \frac{9R}{16 a}$

$v = [v_0 + v_{18}][1 + k + k^2 + (k^3 - \lambda^3) + \dots]$

Jaka siła oddziała na kulę będzie wywierana w B?

w pierwszem przybliżeniu $\quad Y_{AB} = 6\pi\mu R v_B$

$$v_B = \frac{3}{4} Rc\, y_B^2 \left[\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) - R^2\left(\frac{1}{r^5}-\frac{1}{\rho^5}\right)\right] + \frac{1}{4} Rc\left[3\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right) + R^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)\right]$$

$$-\frac{3}{2} Rc\left[a - \frac{2a}{\rho^2}R^2\right]\frac{a}{\rho^3} + \frac{3}{2} Rc\left[3a - \frac{10 a R^2}{\rho^2}\right]\frac{y_B^2 a}{\rho^5}$$

$v = v_0 + v_{18} + \sum v_B$ (dzięki $\frac{Y}{3} = 0$)

$Y = Y_0 + \sum Y_{vB}$

$$-\left(\frac{1}{r^n}-\frac{1}{\rho^n}\right) = 2a\frac{\partial\left(\frac{1}{r^n}\right)}{\partial x} + \frac{4a^2}{2}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r^n}\right)}{\partial x^2} + \frac{8a^3}{2.3}\frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

$$= -\frac{2anx}{r^{n+2}} + 2a^2 n\left(-\frac{1}{r^{n+2}} + \frac{(n+2)x^2}{r^{n+4}}\right) + Aa^3 \dots \frac{x}{r^{n+4}} \quad \frac{1}{r^{n+6}}$$

wykorzystanie, że $2a$

$$\left(\frac{1}{r^n}-\frac{1}{\rho^n}\right)\Big|_{x=0} = \frac{2a^2 n}{r^{n+2}} \qquad \frac{1}{r}-\frac{1}{\rho} = \frac{2a^2}{r^3} + \left(\frac{a^4}{r^7}\right) \qquad \frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3} = \frac{6a^2}{r^5} \qquad \frac{1}{r^5}-\frac{1}{\rho^5} = \frac{10a^2}{r^7}$$

$$Y = 6\pi\mu Rc\left[1 + \frac{9R}{16a}\right] - 6\pi\mu R^2 c\left\{\frac{3}{4}2a^2\sum\frac{1}{r^3} + \frac{3}{4}6a^2\sum\frac{y^2}{r^5} - \frac{3}{2}a^2\sum\left(\frac{1}{r^3} - \frac{6a^2}{r^5}\right) + \frac{3}{2}3a^2\sum\left(\frac{y^2}{r^5} - \frac{10a^2y^2}{r^7}\right)\right\}$$

$$= 6\pi\mu Rc\left\{1 + \frac{9R}{16a} - R\left[9a^2\sum\frac{y^2}{r^5} + 9a^4\sum\frac{1}{r^5} - 45a^4\sum\frac{y^2}{r^7}\right]\right\}$$

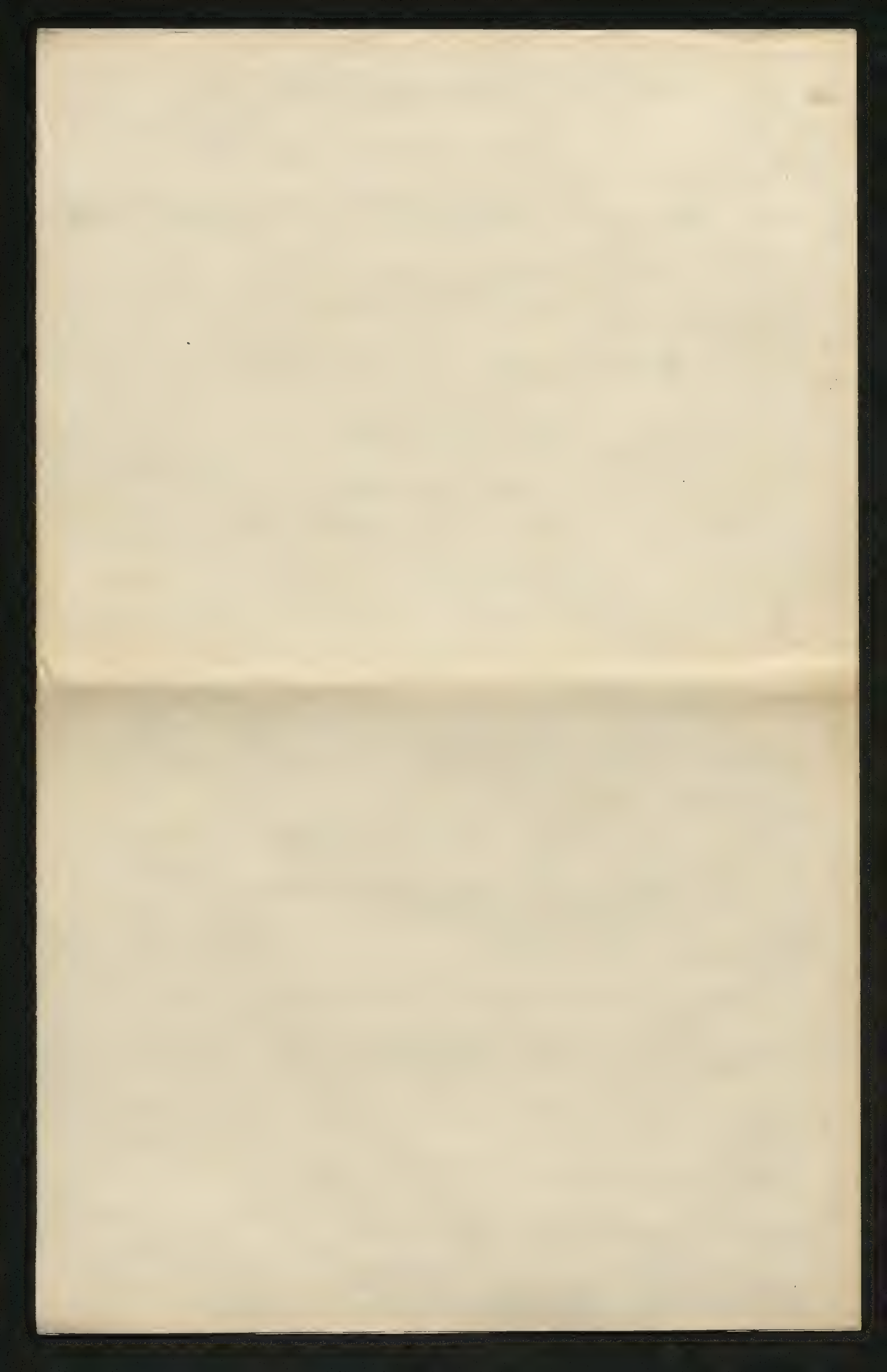
$$= 6\pi\mu Rc\left\{1 + \frac{9R}{16a} - 9R\left[\frac{a^2 . 4.4}{\delta^3} + \frac{a^4 . 2.9}{\delta^5} - \frac{5a^4 . 2.3}{\delta^5}\right]\right.$$

$$= 6\pi\mu Rc\left\{1 + 9\frac{R}{a}\left[\frac{1}{16} - 4.4\left(\frac{a}{\delta}\right)^3 + 8.6\left(\frac{a}{\delta}\right)^5\right]\right\} - \frac{8.6 . a^4}{\delta^5}$$

11.5, 2.9, 8.6

Zmniejszenie oporu się uwydatni gdy $\left(\frac{a}{\delta}\right)^3 > \frac{1}{70}$

$\frac{a}{\delta} > \frac{1}{4}$



Ruch z tarciem   $R \ll \delta$   $R < a$   ~~stosunek $\delta : a$ dowolny~~

$x \gg \delta$   zatem $\delta > a$

będzie w każdym razie przybliżenie ważny wzór

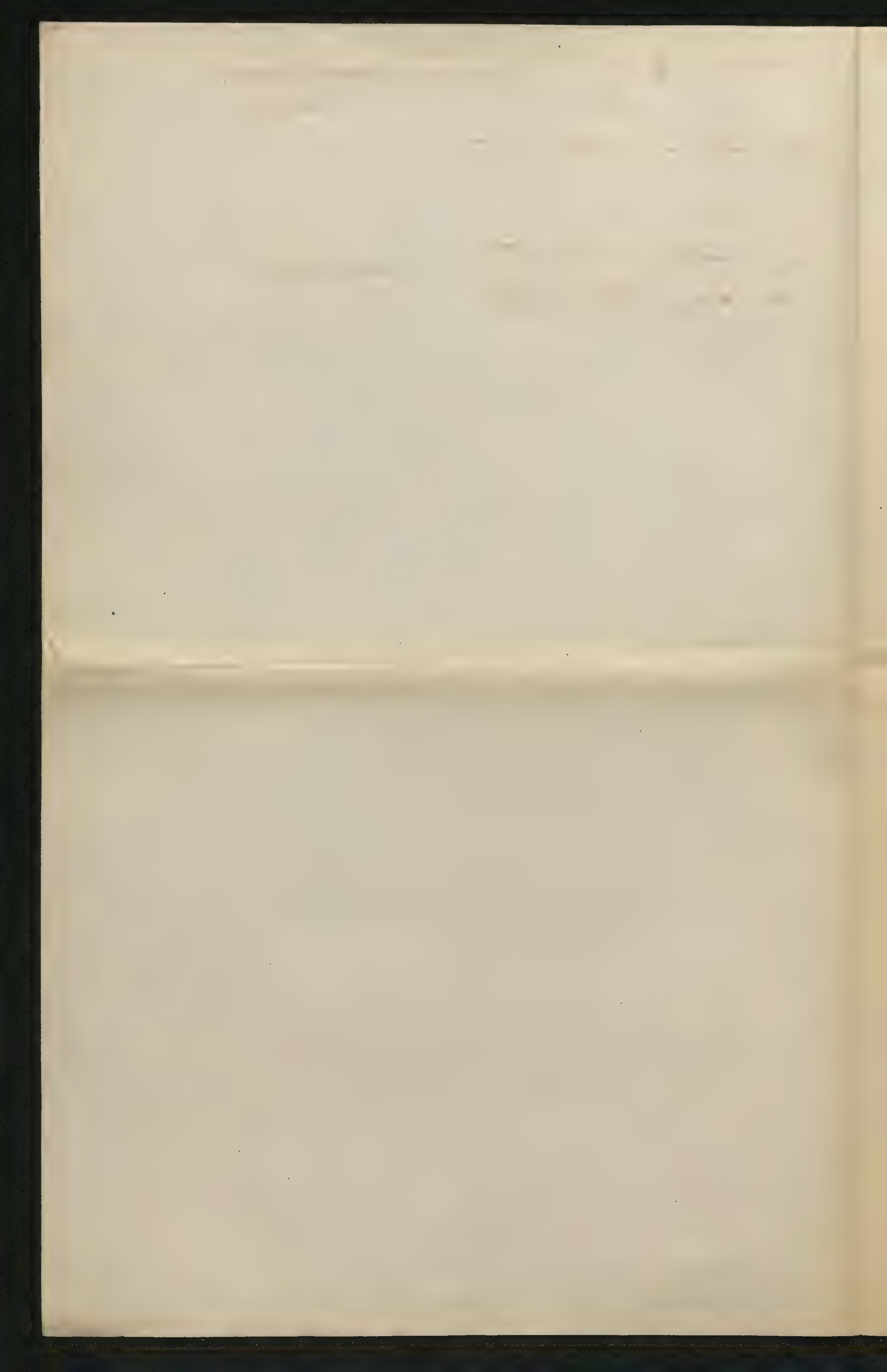
$$F = 6\pi\mu R c \left(1 + \frac{9}{16}\frac{R}{a}\right)$$

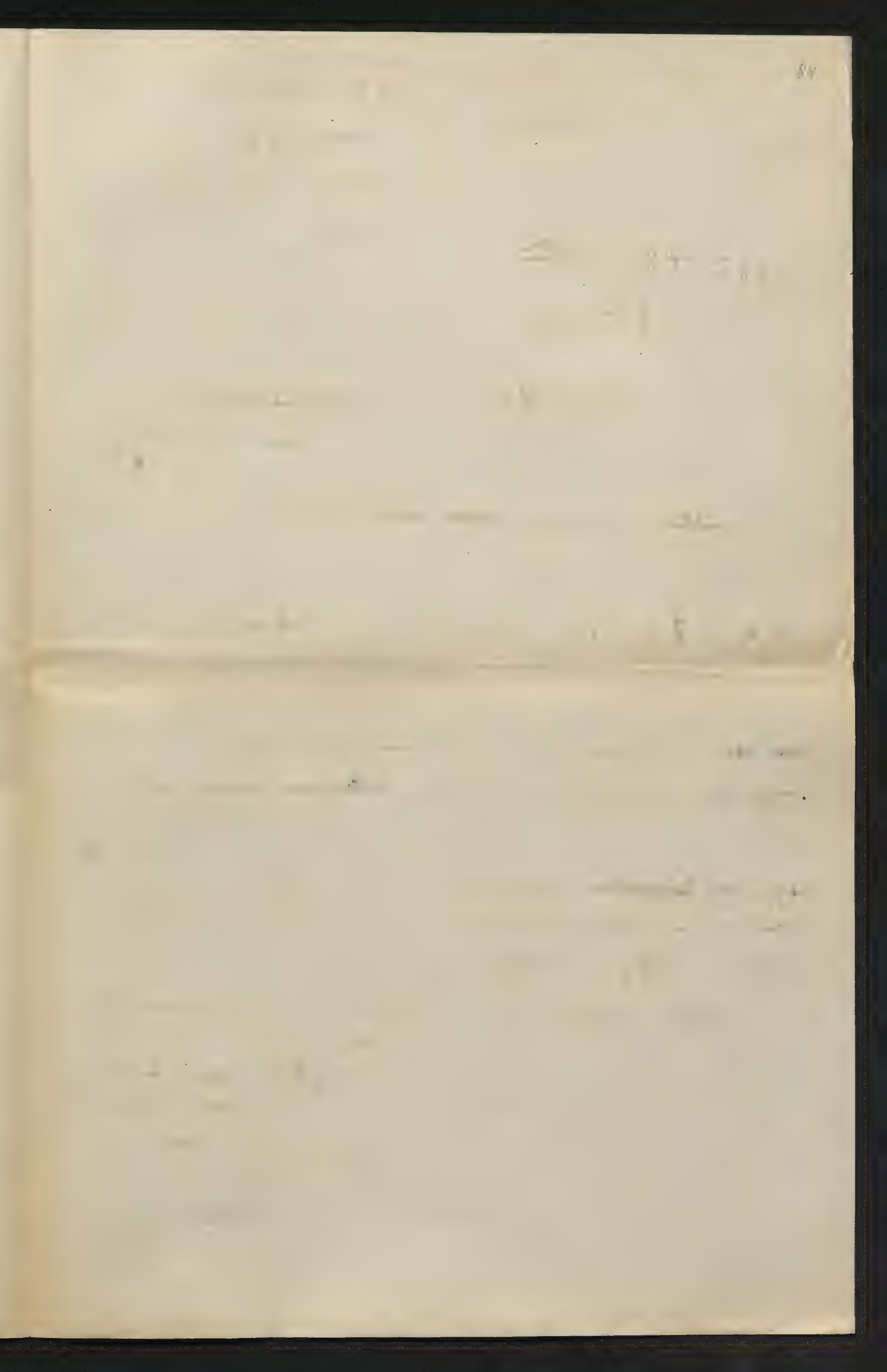
$$v = v_0(1+k) + v_{13}(1+k) = (v_0 + v_{13})(1+k)$$

zatem $v_\infty = \dfrac{6\pi R c a}{\delta^2}\left(1 + \dfrac{9}{16}\dfrac{R}{a}\right)$

więc ściśle powstaje:

$$F = \mu \delta^2 \frac{v_\infty}{a}$$





$$u = \frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$v = \frac{3}{4}\,a\,\frac{xy}{r^3}$$

$$w =$$

nieskończenie strony

$$\frac{9}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(1+\frac{2x^2}{r^2}+\frac{x^4}{r^4}\right)+\left(\frac{3}{4}\frac{axy}{r^3}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{axz}{r^3}\right)^2$$

$$= \frac{9}{16}\frac{a^2}{r^2}\left(1+\frac{3x^2}{r^2}\right)$$

$$X = 6\pi a\mu\left[1+\frac{9}{16}\frac{a^2}{r^2}\left(1+\frac{3x^2}{r^2}\right)\right]$$

$$Y = 6\pi a\mu$$

$$\frac{9}{16}\frac{a}{r^4}\,xy\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)+\frac{9}{16}\,a^2\frac{x^2 r^2 y}{r^6}$$

$$+\frac{9}{16}\,a\,\frac{xy}{r^3}\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$= \frac{3\cdot 9}{16}\,a\,\frac{xy}{r^3} = \frac{27}{16}\,a\,\frac{xy}{r^3}$$

więc wpływ jednostronnych odbić

poprawki we wzorze $6\pi\mu a$ wiodą więc

$$6\pi\mu a\left[1+\dots\left(\frac{R}{\sigma}\right)^{-}\right]$$

da się przedstawić przez superpozycję ~~[illegible]~~ rozkładów Stokesowskich, z odpowiednimi natężeniami.

w kierunku $xyz$

ostatnio n.p.

$$\lim_{r=\infty} u_2 = \frac{9ab}{16Rr}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)$$

więc tak jakby były w punkcie $b$ były przy $u = \frac{3}{4}\frac{a}{R}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)$

$v = \frac{3}{4}\frac{a}{R}\frac{xy}{R^2}$ itd.

$$\lim v_2 = \frac{9}{16}\frac{ab\,xy}{R^3 r}$$

Zatem także odbicie od ściany w ten sam sposób przez addytywną superpozycję

przyczem składowe prostopadłe muszą zniknąć zatem powstanę pewne nierówności $v = c(1+K)(\Sigma v_0 + \Sigma v_{1,3})$

i powstanie także

$$F = \mu\,\delta^2\frac{v_0}{a}$$

Zdający strony ~~[illegible]~~ Strömungsströmen

powstanie przy ścianie spadek liniowy prędkości i wskutek przewodnictwa kula będzie się poruszać

z prędkością: $\quad a\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_R = 4u\,\frac{a}{R}$

i przed będzie $\quad K\frac{(v_1 - v_0)}{a}\cdot 4\dots$

wyczekujący że wszystko będzie w zgodności z teorią Helmholtza jeśli $\delta > a$

o ile $\frac{R}{\cdots}$ tylko że amplituda prędkości $c$ będzie inna niż $v_0$

w warunku wiedząc że $v_0 \ll c$ ?

Ruch normalnie do ściany

$$u_0 = -\frac{3}{4} Rc \left[ \frac{1}{r} + \frac{(x-a)^2}{\rho^3} \right]$$

$$u_{15} = \frac{3}{4} Rc \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{x^2+x^2}{\rho^3} + \frac{6ax(x+a)^2}{\rho^5} \right]$$

$$v_{15} = \frac{3}{4} Rc \left[ \frac{(x-a)y}{\rho^3} + \frac{6axy(x+a)}{\rho^5} \right]$$

$$\Sigma \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) = \sum_{x=x}^{\infty} \frac{4\pi (h-x) x}{\delta^3}$$

$$\int_{\xi=0}^{h} \frac{(x-\xi)^2}{r^3} d\xi dy dz - \int_{\xi=0}^{h} \left[ \frac{x^2+\xi^2}{\rho^3} + \frac{6x\xi(x+\xi)^2}{\rho^5} \right] d\xi dy dz = \int_{\xi=0}^{x} + \int_{x}^{h}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{(x+\xi)^2 + y^2 + z^2}$$

$0 < \xi < x$

$$\int \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) dy dz = 0$$

$$\int \frac{(x-\xi)^2}{r^3} d\xi dy dz = 2\pi \int_0^x (x-\xi) d\xi + 2\pi \int_x^h (\xi - x) d\xi$$

$$= \frac{2\pi}{\delta^3} \left\{ x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{h^2}{2} - \frac{x^2}{2} - hx + x^2 \right\}$$

$$\int \frac{1}{r} dy dz = 2\pi \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - (x-\xi) \right]$$

$$\int \frac{x-\xi}{r^3} dy dz = 2\pi \left( + 1 \right)$$

$$\int \frac{dy\, d\xi}{r^3} = \frac{2\pi}{x-\xi}$$

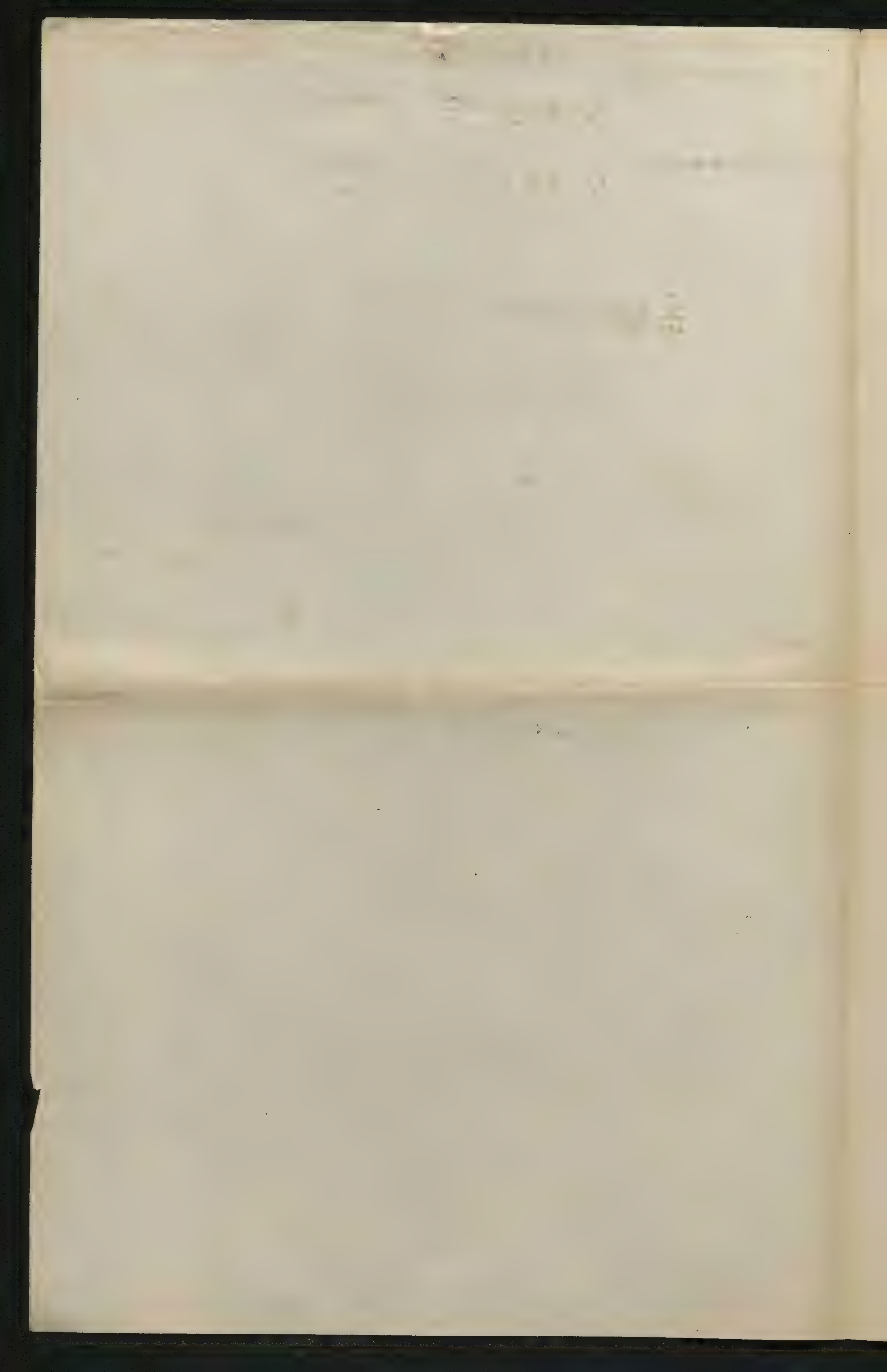
$$-2\pi \int_0^h (\xi + x) dx = -2\pi \left( \xi h + \frac{h^2}{2} \right)$$

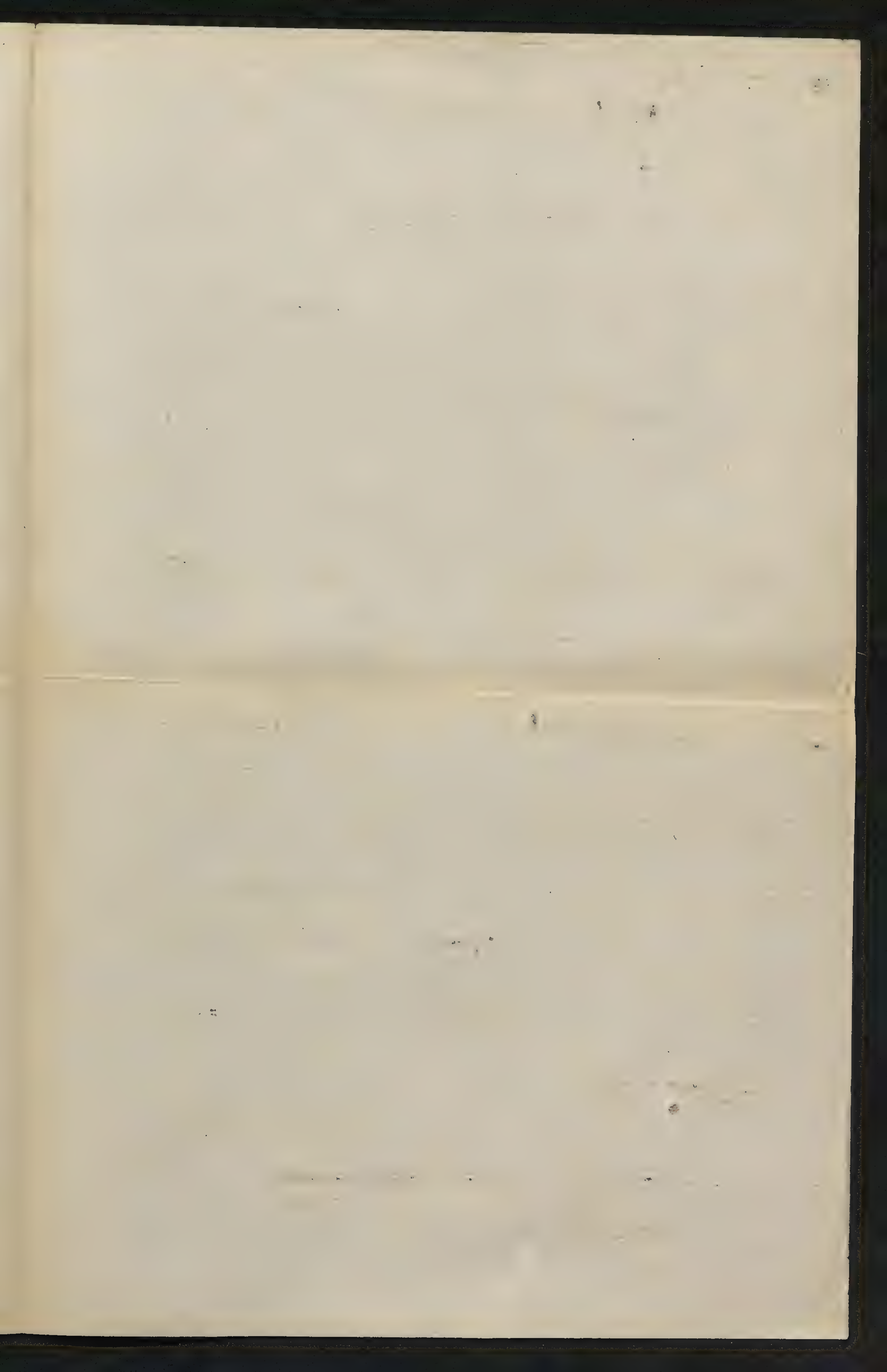
$$2\pi \int_0^{\xi} (\xi - x) dx + 2\pi \int_{\xi}^{h} (x - \xi) dx$$

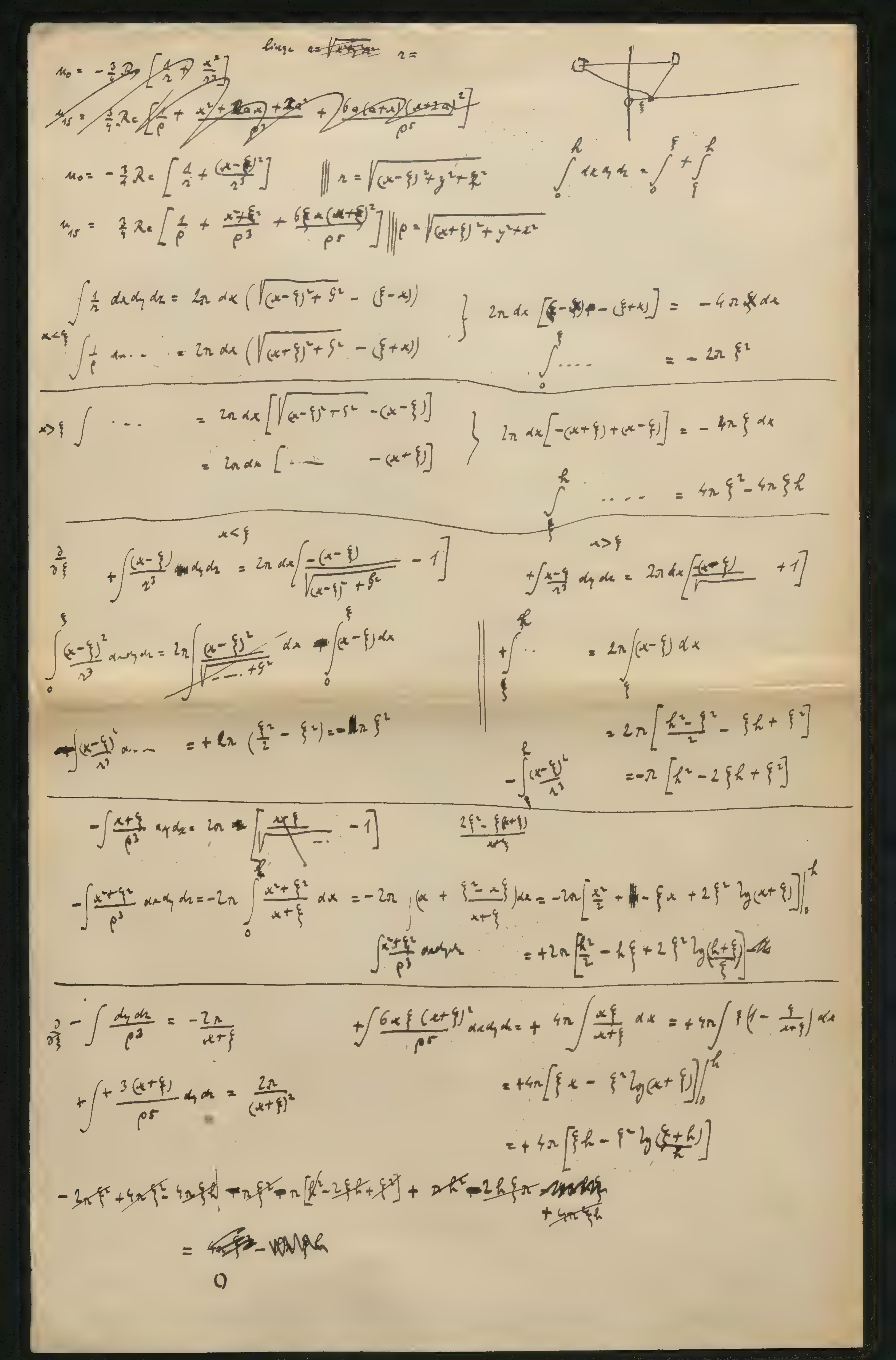
$\xi x - \frac{x^2}{2}$ $\quad$ $\frac{x^2}{2} - \xi x$

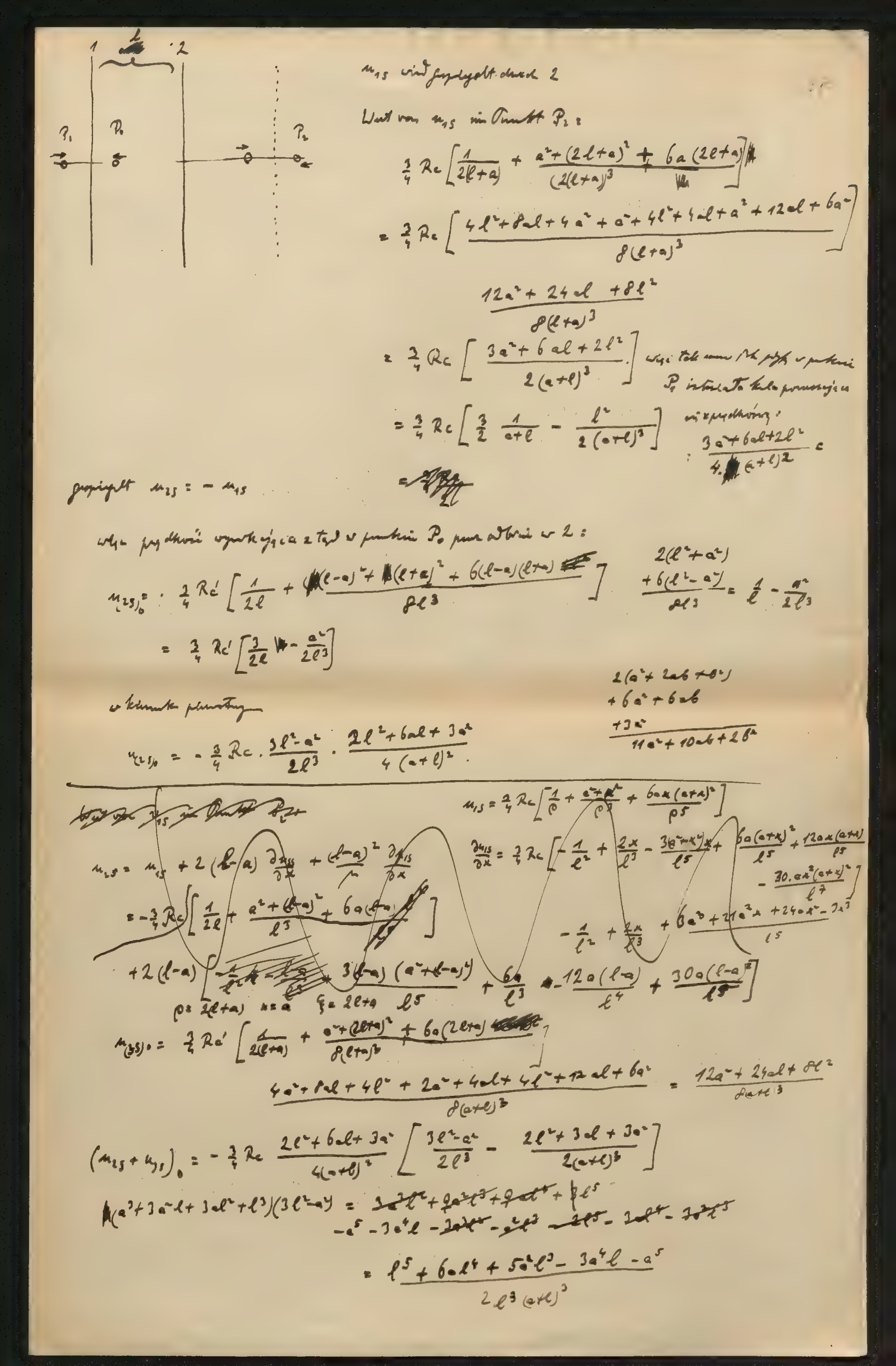
$$2\pi \frac{\xi^2}{2} + 2\pi \left( \frac{h^2}{2} - h\xi - \frac{\xi^2}{2} + \xi^2 \right)$$

$$2\pi \left[ -2\xi h + \xi^2 \right]$$









$u_{15}$ wird gespiegelt durch 2

Wert von $u_{15}$ im Punkt $P_2$:

$$\frac{3}{4} Rc \left[ \frac{1}{2(l+a)} + \frac{a^2 + (2l+a)^2 + 6a(2l+a)}{(2(l+a))^3} \right]$$

$$= \frac{3}{4} Rc \left[ \frac{4l^2 + 8al + 4a^2 + a^2 + 4l^2 + 4al + a^2 + 12al + 6a^2}{8(l+a)^3} \right]$$

$$\frac{12a^2 + 24al + 8l^2}{8(l+a)^3}$$

$$= \frac{3}{4} Rc \left[ \frac{3a^2 + 6al + 2l^2}{2(a+l)^3} \right]$$

$$= \frac{3}{4} Rc \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{a+l} - \frac{l^2}{2(a+l)^3} \right]$$

$$: \frac{3a^2 + 6al + 2l^2}{4(a+l)^2} c$$

gespiegelt $u_{25} = -u_{15}$

$$u_{(25)_0} = \frac{3}{4} Rc' \left[ \frac{1}{2l} + \frac{(l-a)^2 + (l+a)^2 + 6(l-a)(l+a)}{8l^3} \right]$$

$$\frac{2(l^2+a^2) + 6(l^2-a^2)}{8l^3} = \frac{1}{l} - \frac{a^2}{2l^3}$$

$$= \frac{3}{4} Rc' \left[ \frac{3}{2l} - \frac{a^2}{2l^3} \right]$$

$$u_{(25)_0} = -\frac{3}{4} Rc \cdot \frac{3l^2 - a^2}{2l^3} \cdot \frac{2l^2 + 6al + 3a^2}{4(a+l)^2}$$

$$2(a^2 + 2ab + b^2) + 6a^2 + 6ab + 3a^2 = 11a^2 + 10ab + 2b^2$$

---

$$u_{15} = \frac{3}{4} Rc \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{a^2 + x^2}{\rho^3} + \frac{6ax(a+x)^2}{\rho^5} \right]$$

$$\frac{\partial u_{15}}{\partial x} = \frac{3}{4} Rc \left[ -\frac{1}{l^2} + \frac{2x}{l^3} - \frac{3(a^2+x^2)}{l^5} + \frac{6a(a+x)^2}{l^5} + \frac{12ax(a+x)}{l^5} - \frac{30ax^2(a+x)^2}{l^7} \right]$$

$$u_{25} = u_{15} + 2(l-a) \frac{\partial u_{15}}{\partial x} + \frac{(l-a)^2}{2} \frac{\partial^2 u_{15}}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{3}{4} Rc \left[ \frac{1}{2l} + \frac{a^2 + (l-a)^2}{l^3} + 6a(l-a) \right]$$

$$+ 2(l-a) \left[ -\frac{3(l-a)(a^2+(l-a)^2)}{l^5} + \frac{6a}{l^3} - \frac{12a(l-a)}{l^4} + \frac{30a(l-a)^2}{l^5} \right]$$

$\rho = 2(l+a)$ $x = a$ $\xi = 2l+a$

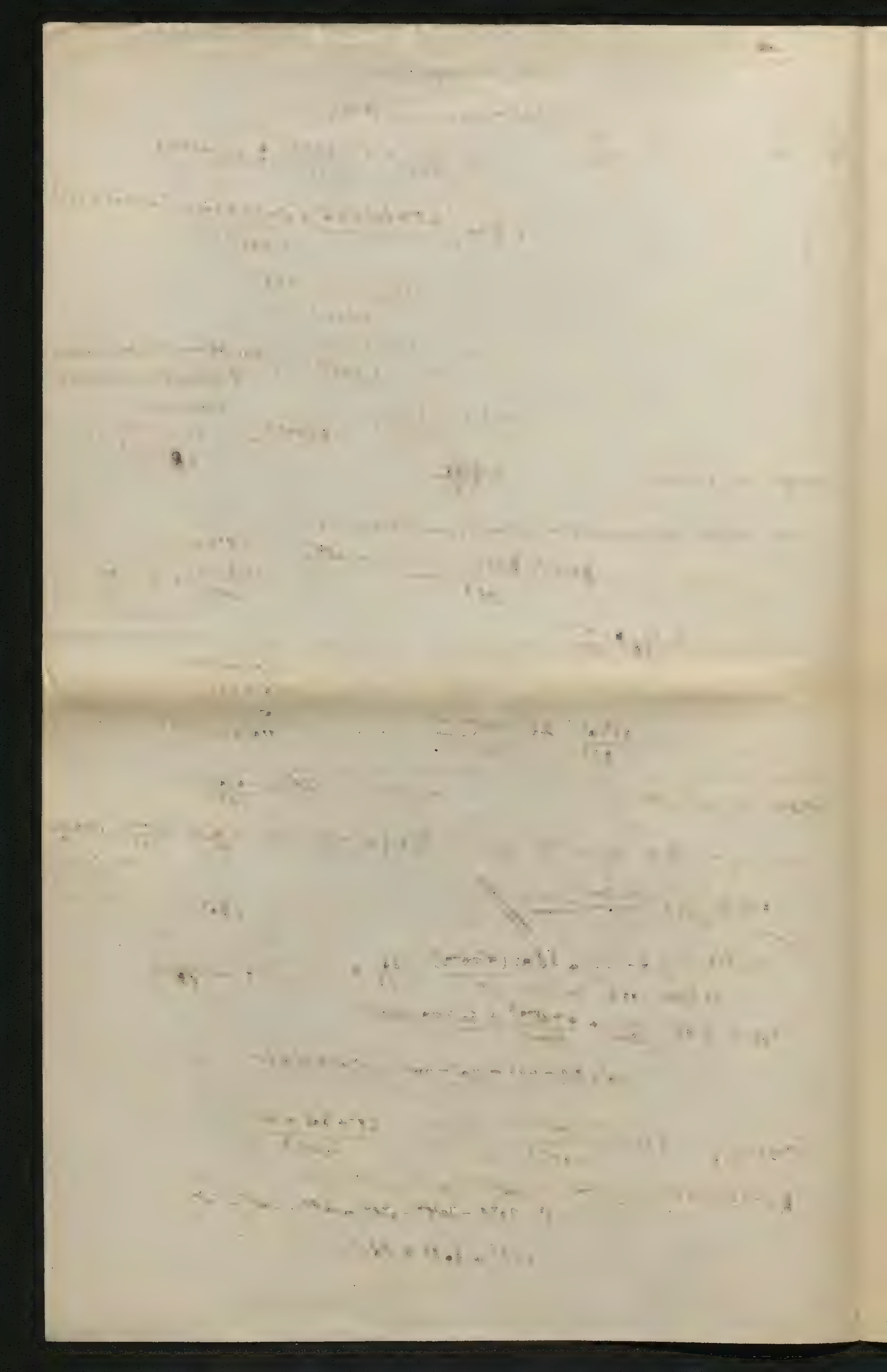
$$u_{(35)_0} = \frac{3}{4} Rc' \left[ \frac{1}{2(l+a)} + \frac{a^2 + (2l+a)^2 + 6a(2l+a)}{8(l+a)^3} \right]$$

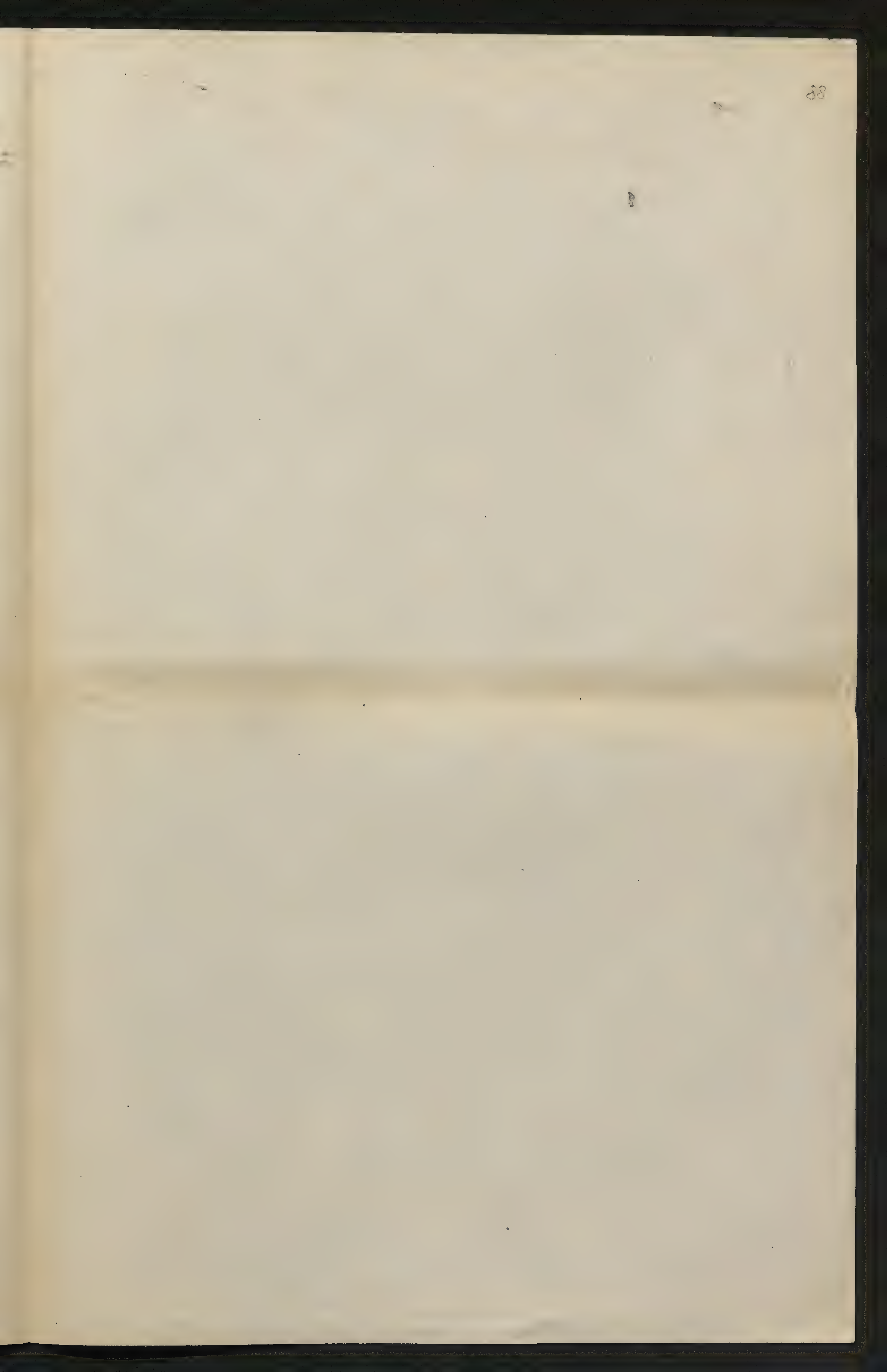
$$\frac{4a^2 + 8al + 4l^2 + 2a^2 + 4al + 4l^2 + 12al + 6a^2}{8(a+l)^3} = \frac{12a^2 + 24al + 8l^2}{8(a+l)^3}$$

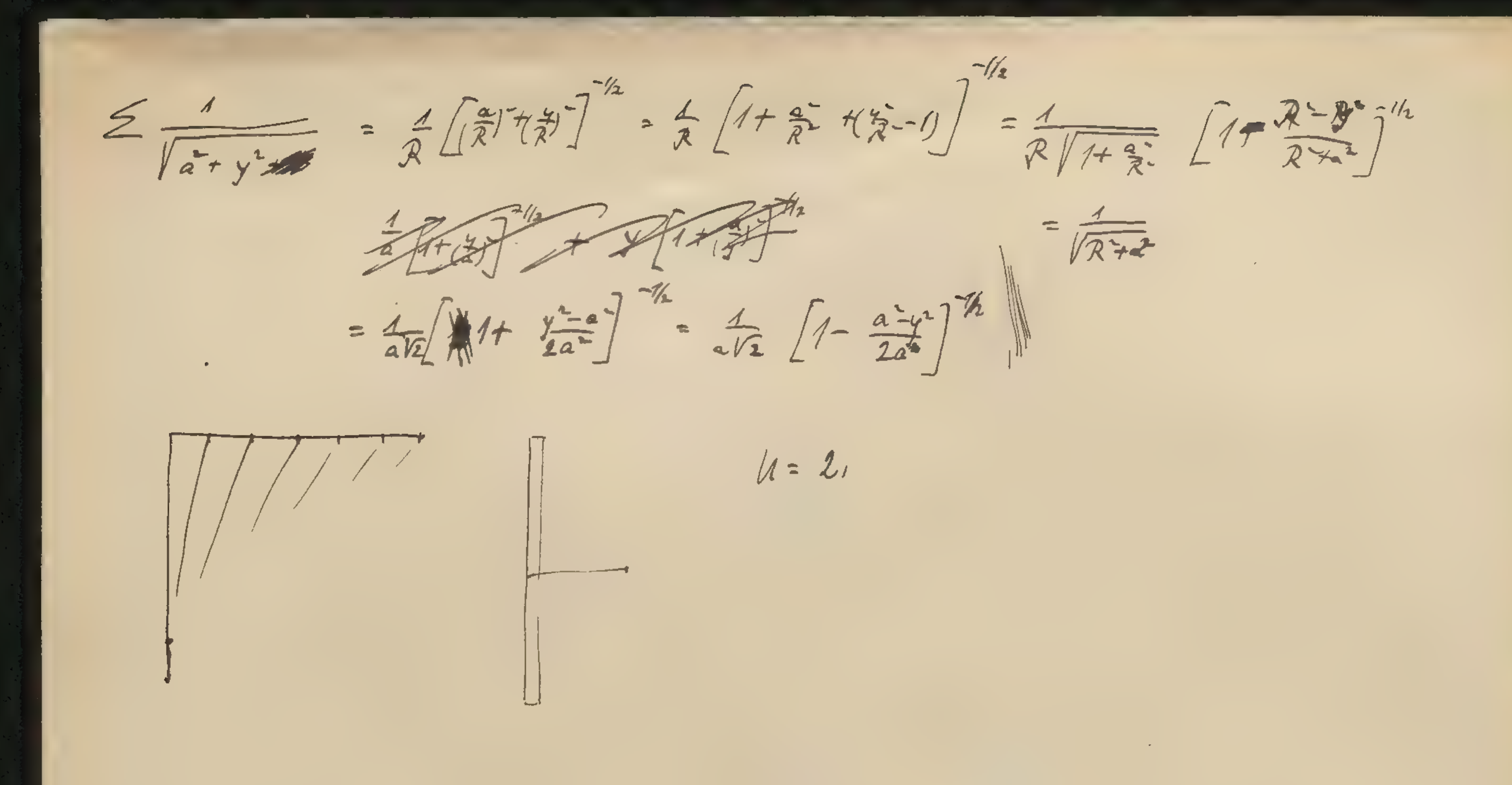
$$(u_{25} + u_{35})_0 = -\frac{3}{4} Rc \frac{2l^2 + 6al + 3a^2}{4(a+l)^2} \left[ \frac{3l^2 - a^2}{2l^3} - \frac{2l^2 + 3al + 3a^2}{2(a+l)^3} \right]$$

$$(a^3 + 3a^2 l + 3al^2 + l^3)(3l^2 - a^2) = \ldots + 3l^5 - a^5 - 3a^4 l - \ldots$$

$$= \frac{l^5 + 6al^4 + 5a^2 l^3 - 3a^4 l - a^5}{2l^3(a+l)^3}$$






u = 2,

$m \quad m \quad n \quad y_n \quad z_n$

$\sum y_n^2 \sum \frac{1}{r_m^5}$

$\delta \sum \frac{1}{r^5} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{y^2+z^2}^5} = \int \frac{y}{\cos^2\varphi} \frac{d\varphi \cos^5\varphi}{y^5} = y^{-4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{1}{y^4} \int (\cos\varphi - \sin^2\varphi \cos\varphi)\, d\varphi$

$+\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}$, $\frac{4}{3}$

$dz = \frac{y}{\cos^2\varphi} d\varphi$

$z = y \operatorname{tg}\varphi$

$\sum \frac{y^2}{r^5} = \frac{4}{3\delta} \sum \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\delta^3}\frac{4}{3}\left[ 2\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots \right\}\right]$

1
0·25
0·111
0·067
0·040
0·032
0·020
0·125
1·65

$\frac{4 \cdot 9 \cdot 3}{3} = \frac{17 \cdot 2}{2} = 8{\cdot}6$

16. $\frac{1}{12}$, 16

$\sum \frac{y^2}{r^5} = \frac{4 \cdot 4}{\delta^3}$

$\sum \frac{1}{r^5} = \frac{4}{3\delta} \sum \frac{1}{y^4} = \frac{4}{3\delta}\, 2\left\{1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \frac{4}{3 \cdot 5^3}\right\}$, $= \frac{1}{225}$

1
0·067
0·012
0·004
0·002
0·004
1·09

$\frac{2 \cdot 18 \cdot 4}{3} = 8{\cdot}72$

$\sum \frac{1}{r^5} = \frac{2{\cdot}9}{\delta^5}$

$\int \cos\varphi (1-\sin^2)^2 = \int \cos\varphi - 2\sin^2\varphi \cos\varphi + \sin^4\varphi \cos\varphi$

$2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}$

$\sum \frac{y^2}{r^7} = \frac{1}{\delta}\frac{1}{y^6}\int \cos^5\varphi \, d\varphi$

$= \frac{16}{15\delta^5} \cdot 2 \cdot 1{\cdot}09 = 2 \cdot \underbrace{1{\cdot}09 \cdot 1{\cdot}07}_{1{\cdot}17}$

$= 2{\cdot}3$

$\sum \frac{y^2}{r^7} = \frac{2{\cdot}3}{\delta^5}$

$-\frac{1}{2} \quad \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} \quad \frac{-\frac{5}{2}}{3} \quad -\frac{7}{2} \over 4$

$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}\left[1 - \left(1 + \frac{4a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}\frac{4a^2}{r^2} - \frac{3}{8}\left(\frac{4a^2}{r^2}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{4a^2}{r^2}\right)^3 - \frac{35}{128}\left(\frac{4a^2}{r^2}\right)^4 - \cdots\right]$

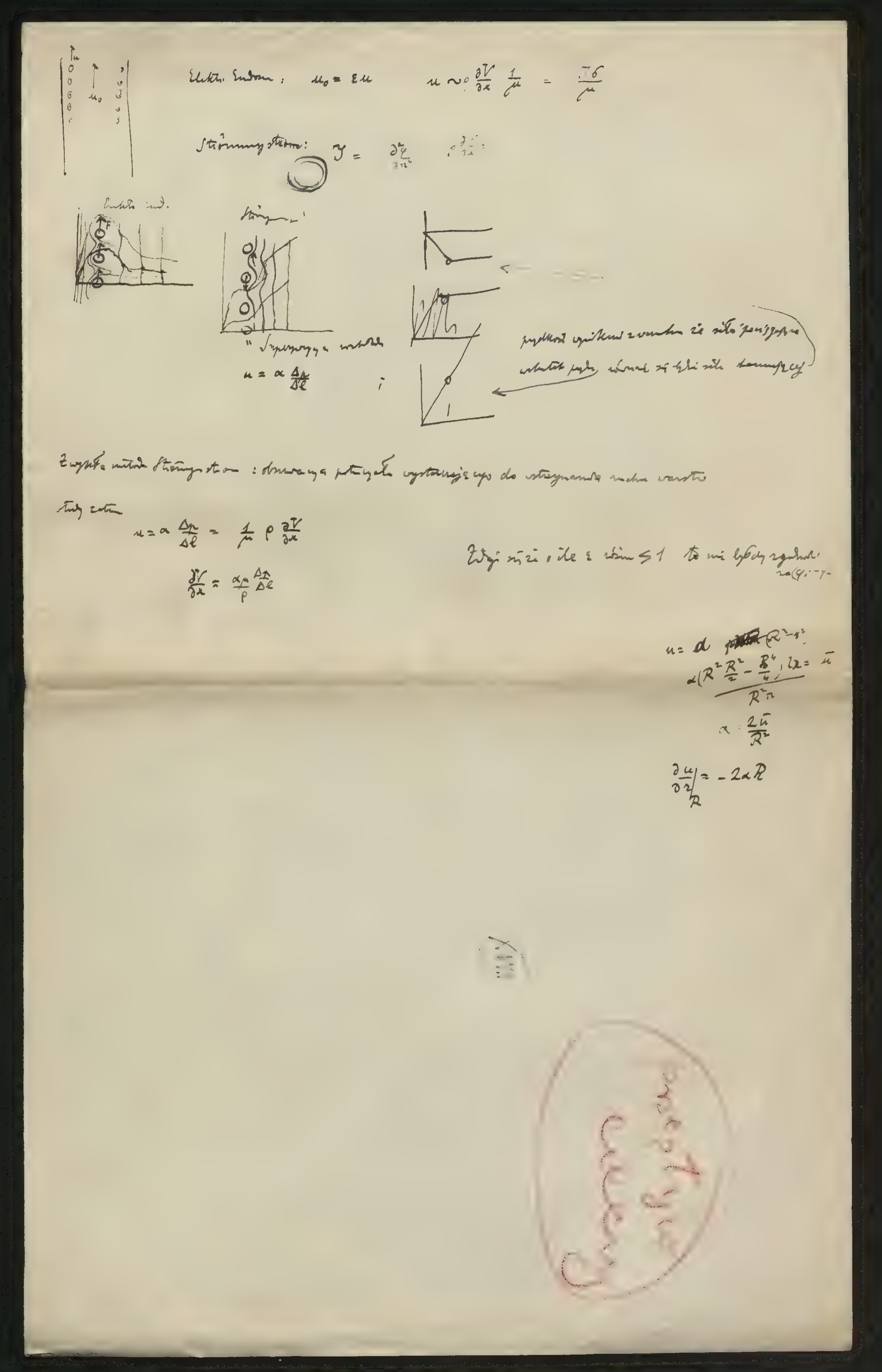
$= \frac{1}{r}\left[\frac{2a^2}{r^2} - \frac{6a^4}{r^4} + 20\frac{a^6}{r^6} - \right]$

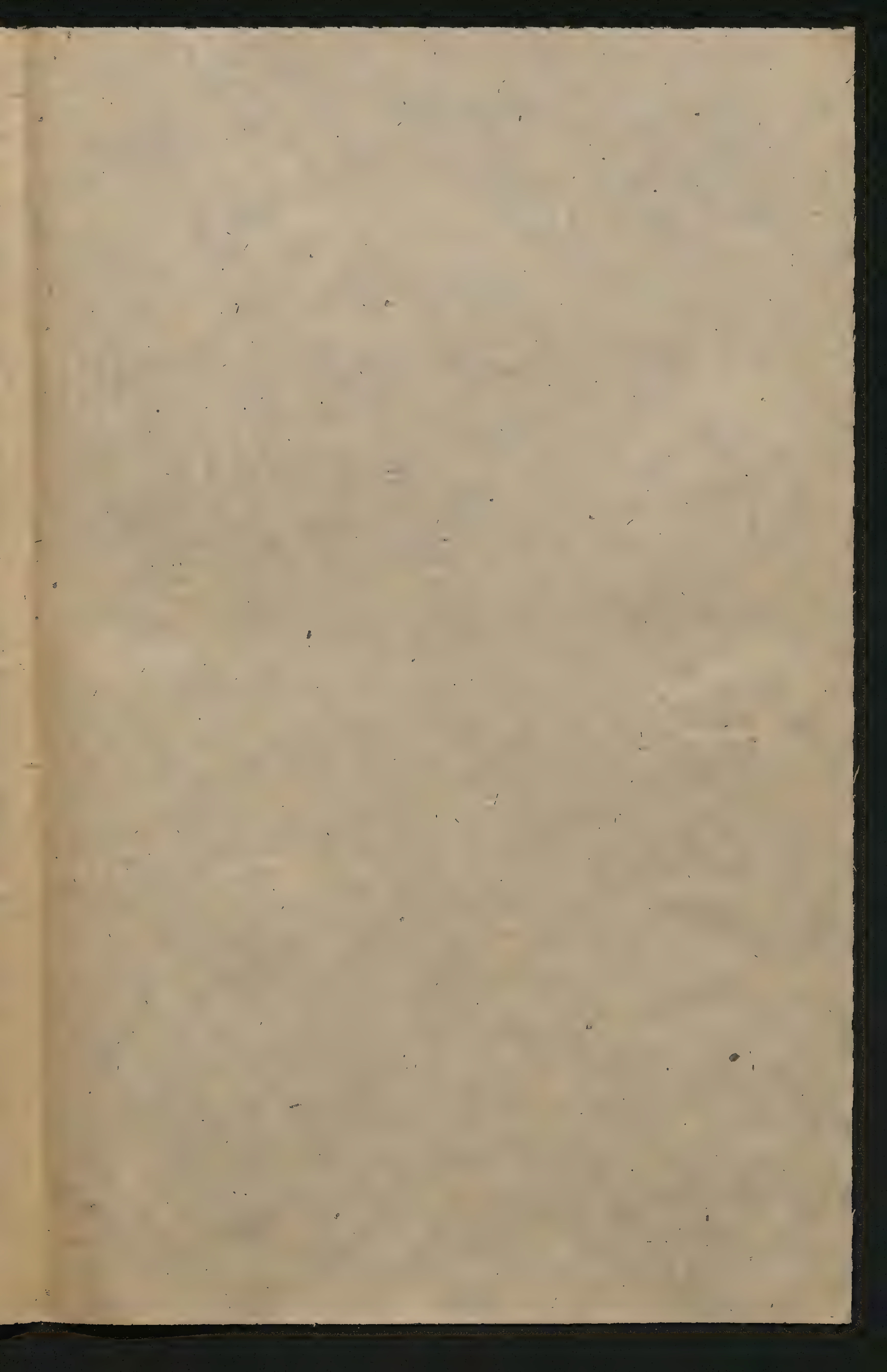
$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1$

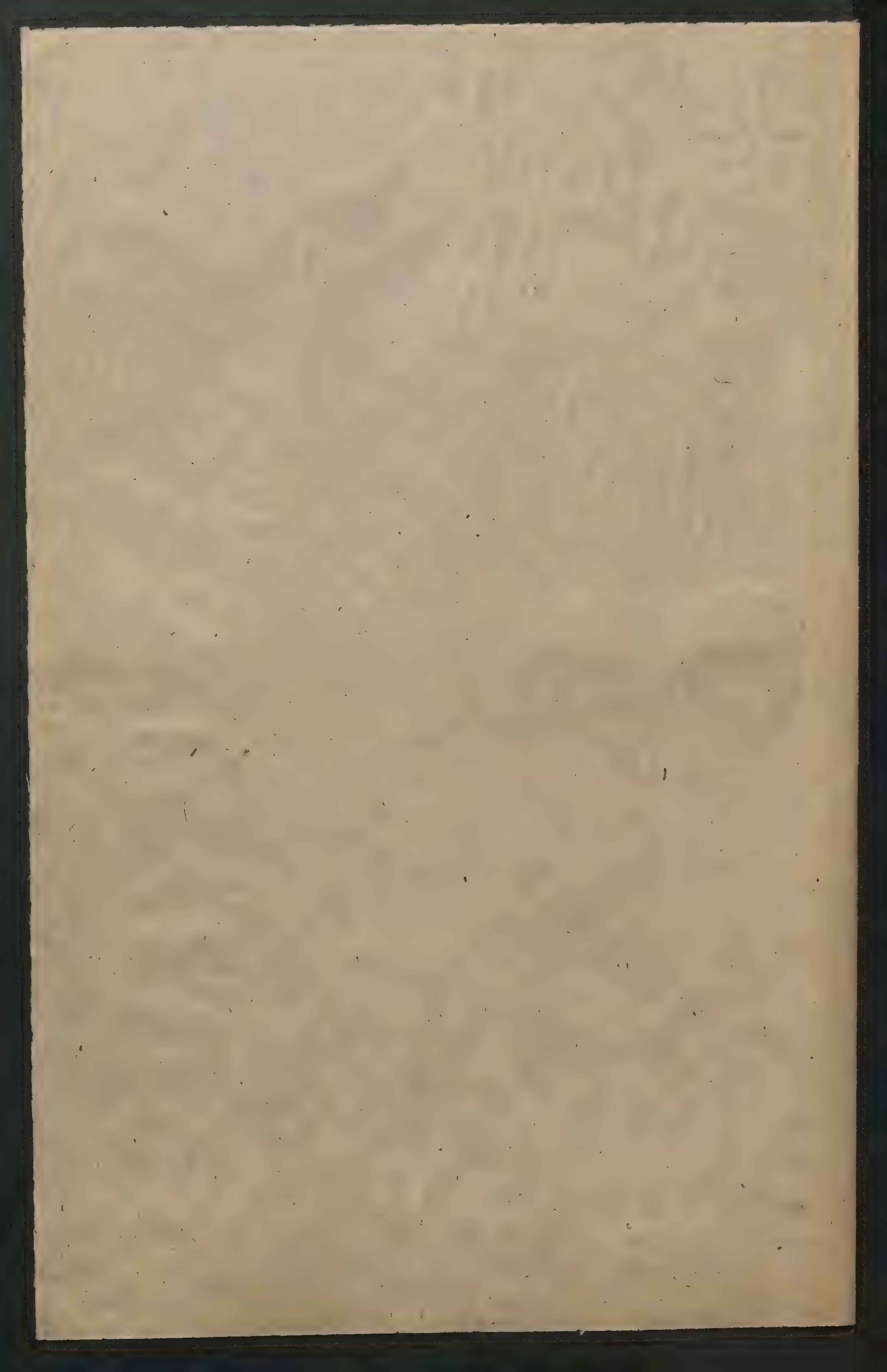
$\operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$

$1 + \cos^2\varphi = 1 + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{3+\cos 2\varphi}{2}$

$= 1 + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2+\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} =$


Elektr. Endosm.:
Strömungsstrom:
$u = \alpha \frac{\Delta p}{\Delta l}$
$u = \alpha \frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{1}{\mu} \rho \frac{\partial V}{\partial x}$
$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\alpha \mu}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta l}$
$\alpha = \frac{2\bar{u}}{R^2}$
$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_R = -2\alpha R$





84/53 [illegible]

Notizblätter zu

Van der Waals'

Zustandsgleichung

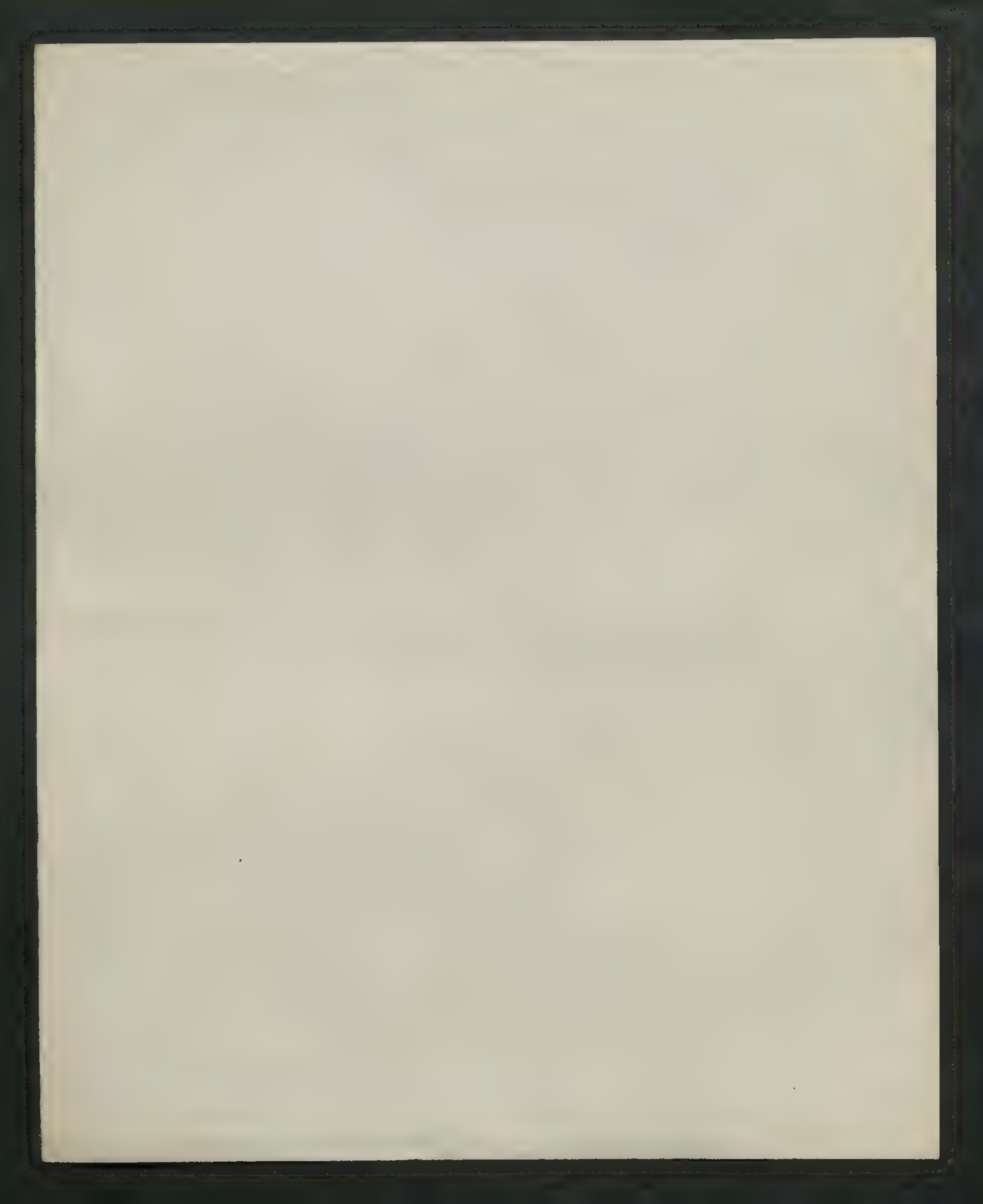
| | |
|---|---|
| Durège Theorie d. ellipt. Functionen 1887 | 6.50 |
| — Elemente d. Functionentheorie 1893 | 6.80 |
| — Die ebenen Curven dritter Ord. 1871. | 7.20 |
| Dziwiński Wykłady matematyki tom 1. 1902. | 30.– |
| Encyklopädie der mathem. Wissenschaften (Burkhardt-Meyer) | 107.30 |
| Enneper Elliptische Functionen 1890 | 22.– |
| Escherich Einleitung in d. anal. Geom. des Raumes 1881. | 6.– |
| Fiedler Darstellende Geom. 3 Th. 1888. | 35.– |
| Folkierski Rachunek różniczkowy i całkowy | |
| Fort & Schlömilch Lehrb. d. analyt. Geometrie 2 Th 1898 | 10.– |
| Forsyth Lehrbuch der Differentialglgen 1889 | 14.– |
| Theorie d. Differentialglgen I Th. 1893. | 12.– |
| Fricke R. Vorl. über versch. Gebiete d. höheren Math. 1900 | 12.– |
| Geiser Theorie d. Kegelschnitte 1867. | 6.– |
| Gordan Invariantentheorie 1887. | 18.– |
| Goursat Vorl. über Integration d. partiellen Differentialglgen I. Ord. 1893. | 7.50 |
| Graefe Vorl. über d. Th. der Quaternionen 1883. | 3.60 |
| Grassmann Gesammelte Werke 1902. 2 Bd. | 58.– |
| Gretschel Lehrbuch zur Einf. in d. organische Geometrie 1868. | 7.– |
| Hankel Th. der complexen Zahlensysteme 1867. | 2.– |
| Heine Handbuch d. Kugelfunctionen 1881 | 12.– |

# Bemerkung über den gegenseitigen Abstand von Gasmolekülen und über Van der Waals' Zustandsgleichung.

Im 67. Bande dieser Annalen hat Herr P. Hertz eine Abhandlung veröffentlicht, in welcher er unter anderem die Meinung ausspricht, dass sich bisher alle Theoretiker in der Gastheorie einer den tatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechenden vereinfachten Überlegungsweise bedient hätten, indem sie die Gasmoleküle als gleichförmig verteilt annehmen und als deren gegenseitigen Abstand den Wert $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ansehen (wo n die durchschnittliche auf die Volumeinheit entfallende Zahl bedeutet) gleichsam als ob die Moleküle in einem einfachen Raumgitter angeordnet wären.

Diesbezüglich möchte ich nun bemerken, dass ich in zwei Arbeiten*) vor einigen Jahren Formeln für die gemäss der Wahrscheinlichkeit sich einstellenden (unregelmässigen) Ungleichförmigkeiten der Dichteverteilung, sowohl für ideale Gase als auch für Gase mit allgemeiner Zustandsgleichung, abgeleitet habe und dann auch auf Erscheinungen hingewiesen habe, welche als experimentell wahrnehmbare Consequenzen dieser Ungleichförmigkeit gedeutet werden müssen.

Hier möchte ich nur zeigen, dass die von Hertz in strengerer (und allgemeinerer) Weise abgeleitete Wahrscheinlichkeitsformel (falls man sich auf den dreidimensionalen Raum beschränkt) gleichbedeutend ist mit einer von mir angegebenen Formel und möchte daran



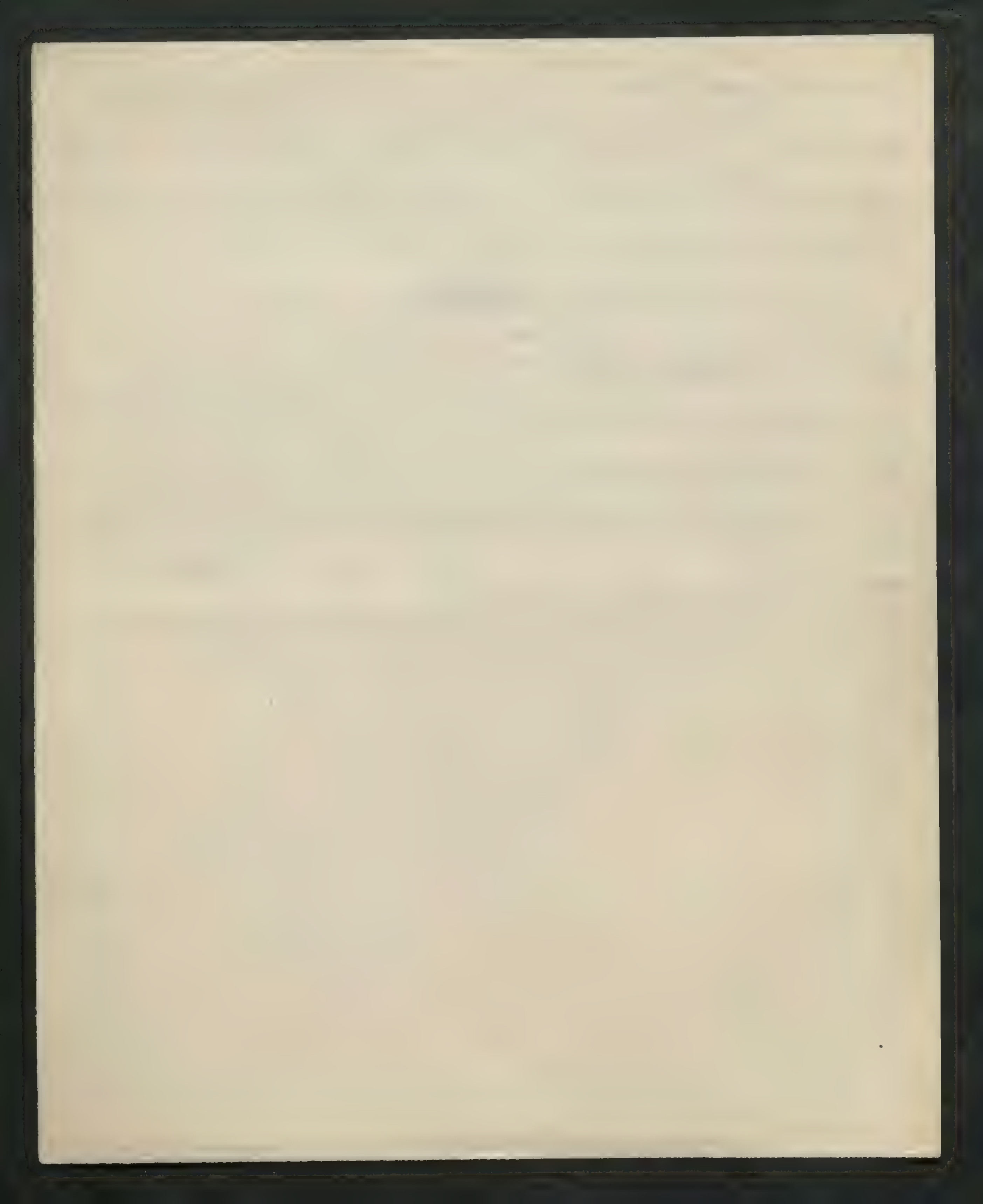
Bekanntlich ist die ältere (Boltzmann u. Lorentz, Jäger, van Laar) ursprüngliche angenäherte Berechnungsweise v. d. Waals durch exactere Methode ersetzt worden, welche als theoretische, den Voraussetzungen der v. d. Waals'schen Theorie entsprechende Zustandsgleichung die Formel geliefert haben:

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{b}{v} + \frac{5}{8}\frac{b^2}{v^2} + \left(\frac{1283}{8960} + \frac{3}{2}\,0{\cdot}0958\right)\frac{b^3}{v^3} + \cdots\right]$$

*) Sitzungsber. d. k. Wr. Akad. 1898/99 p. 477 Beibl. 23 (1899) p. 547

Dabei rührt das quadratische Glied der nach Potenzen von $\frac{b}{v}$ fortschreitenden Reihe von der Berücksichtigung der Zusammenstösse von vier Molekülen aus einem von dreifachen Zusammenstössen dreier Moleküle.

Dabei setzen aber jene Methoden voraus, dass die Anzahl von Molekülpaaren, deren Centraldistanz zwischen $\sigma$ und $\sigma+\delta$ liegt $2\pi n^2 \sigma^2 \delta$ beträgt (Gleichung 149 Boltzmann II p. 146)



Sie ist offenbar grösser als die Wahrscheinlichkeit, dass nur ein Punkt zwischen $r_1$ und $r_2$ hineinfällt aber gar keiner innerhalb $r_1$ – diese erhält man als Produkt von (welche gleich ist)

$$W'_{(r_1 r_2)} = e^{-nk_1} \cdot n(k_2-k_1)\, e^{-n(k_2-k_1)} = n(k_2-k_1)\, e^{-nk_2}$$

(3) (2)

Indem man jedoch zur Grenze für $r_2 = r_1 + dr$ übergeht so erhält man aus beiden Ausdrücken denselben (auch von Hertz abgeleiteten) Wert

$$w(r)\,dr = e^{-nk}\, n \frac{dk}{dr}\, dr = 4\pi r^2 n\, e^{-\frac{4\pi n r^3}{3}}\, dr$$

1) Für die Wahrscheinlichkeiten dass der Nachbarpunkt eine Entfernung zwischen $r$ und $r+dr$ habe, resp. dass die Kugelschale $r \,..\, r+dr$ nur einen oder auch mehrere Punkte enthalte.

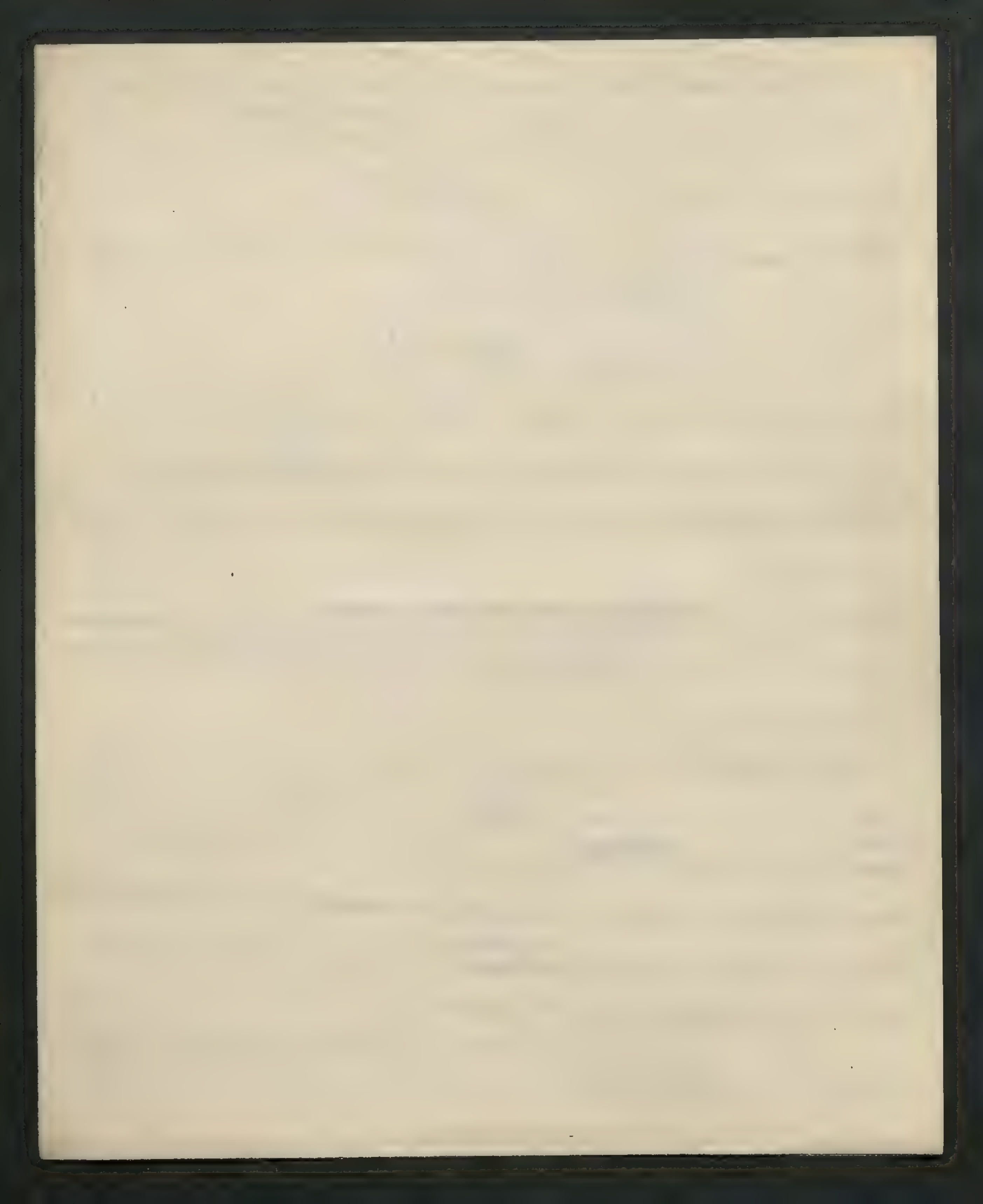
da die Wahrscheinlichkeit dass mehrere Punkte in derselben vorkommen ist offenbar klein von höherer Ordnung ist.

Die Anzahl von Molekülpaaren welche einen Abstand zwischen $r$ und $r+dr$ besitzen ist somit pro Vol. Einheit

$2\pi r^2 n^2 e^{-\frac{4\pi n}{3} r^3}\, dr$ was an Stelle der durch ein Versehen entstellten Formel 6) meiner Arbeit zu setzen ist.

Einige Worte mögen noch der Bedeutung dieser Überlegungen für Van der Waals' Zustandsgleichung der Gase gewidmet werden. Ich hatte (loc. cit.) darauf hingewiesen in welcher Weise das Glied $\frac{a}{v^2}$ jener Gleichung modifiziert werden müsse, falls die Anziehungssphäre der Moleküle nicht grösser ist als die Räume innerhalb welcher noch merkliche Dichtigkeitsunregelmässigkeiten auftreten und hatte bemerkt dass auch die

Berechnung der von $\frac{b}{v}$ abhängigen Glieder durch Berücksichtigung dieser Ungleichförmigkeiten zu verbessern ist.



Für die Wahrscheinlichkeit, dass $n$ [$i$] kräftelose Punktmoleküle sich in einem Raume [$k$] befinden, welchem bei gleichförmiger Verteilung die Anzahl $\nu$ [$nk$] entfallen würde, habe ich loc. cit. p. 628 den Ausdruck angegeben: $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} = f(n)$ $\quad \frac{(nk)^i e^{-nk}}{i!} = f(i)$

Dieser Ausdruck genügt auch tatsächlich offenbar der Bedingung, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich Eins ist, und dass die durchschnittlich auf jenen Raum entfallende Molekülzahl $\nu$ [$nk$] beträgt, da wir haben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = 1 \qquad \sum_{i=0}^{\infty} f(i) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, f(n) = \nu \qquad \sum i f(i) = nk$$

Da die Lagen der Moleküle von einander unabhängig sind, kann man sich nun einen kugelförmigen Raum vom Radius $r$ um ein gegebenes Molekül herum construiert denken und nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass der Nachbarpunkt eine grössere Entfernung als $r$ besitzt, dass also kein anderes Molekül in jenen Raum hineinfällt. Das ist die von Hertz mit $1-W(r)$ bezeichnete Wahrscheinlichkeit, für welche obiger Ausdruck (resp. Formel (7) p. 628 l. c.) mit $n=0$ ergibt: $1-W(r) = e^{-\nu}$

und daraus folgt die Wahrscheinlichkeit dass der Nachbarpunkt eine kleinere Entfernung habe als $r$ übereinstimmend mit Hertz:

$$W(r) = 1-e^{-\nu}$$ oder in [illegible] Bezeichnung in $1-e^{-nk}$.

Die von Hertz mit $W(r_1, r_2)$ bezeichnete Wahrsch. dass der Nachbarpunkt eine Entfernung zwischen $r_1$ und $r_2$ besitze ist identisch mit der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit dass in die Kugel $r_1$ gar kein Punkt, in die Kugelschale $r_2-r_1$ ein oder mehrere Punkte hineinfallen:

$$W(r_1, r_2) = e^{-\nu v_1}\left(1-e^{-\nu(v_2-v_1)}\right) = e^{-\nu v_1} - e^{-\nu v_2} = W(r_2) - W(r_1)$$ in Übereinstimmung mit Hertz

$$\int_0^\infty 4\pi r^3 \gamma\, e^{-\frac{4}{3}\pi r^3 \gamma}\, dr$$

$$\frac{4}{3}\pi\gamma\, r^3 = x$$

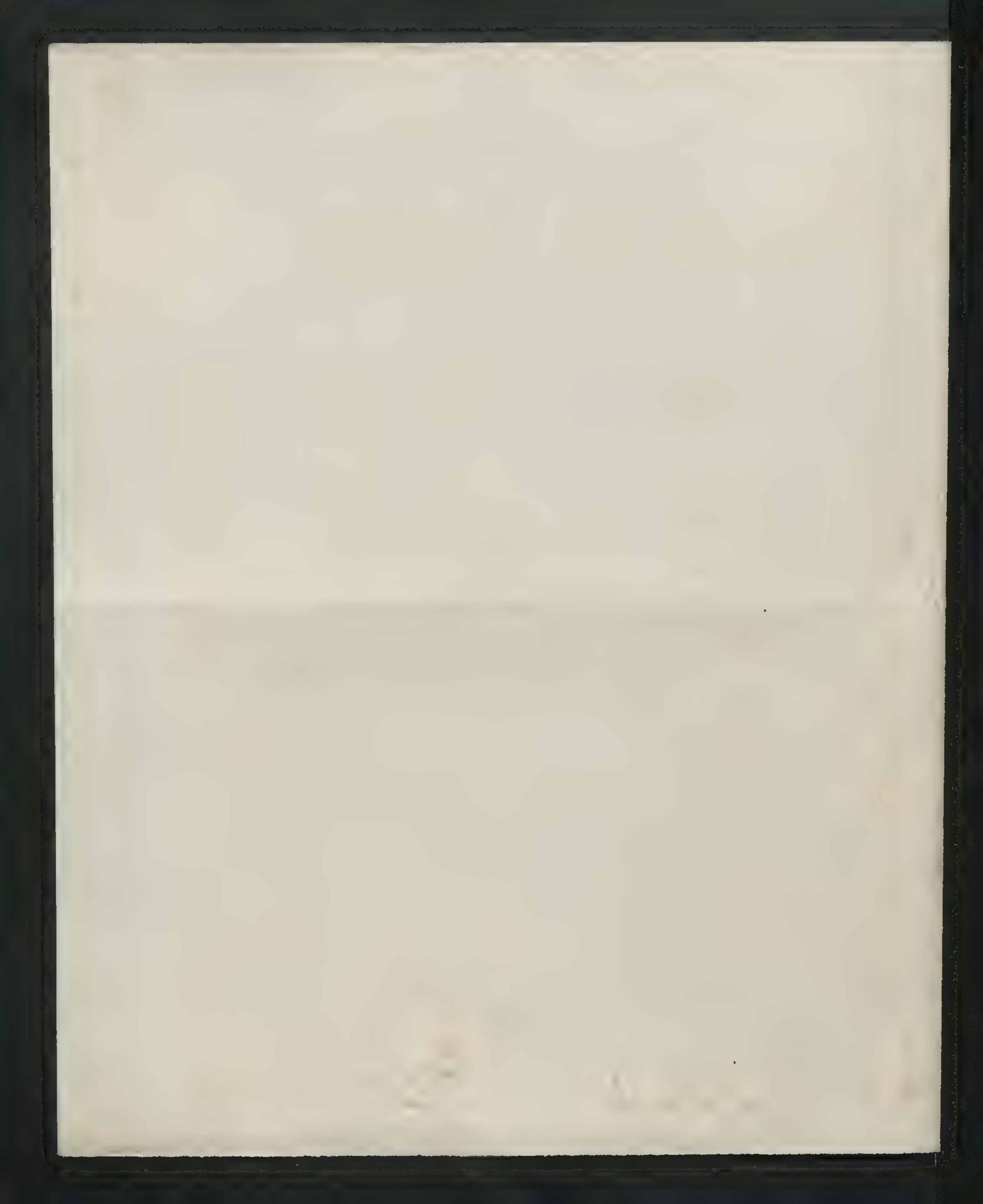
$$4\pi\gamma\, r^2\, dr = dx$$

$$r = \left(\frac{x}{\frac{4}{3}\pi\gamma}\right)^{1/3}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx \quad x^{1/3}}{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi\gamma}}$$

$$x^{\ldots}\, e^{-x}\, dx = \ldots \Gamma_3$$

| | |
|---|---|
| Fretschel Lehrbuch zur Einf. in d. organische Geometrie 1868. | 7. |
| Hankel Th. der complexen Zahlensysteme 1867. | 2. – |
| Heine Handbuch d. Kugelfunctionen 1881. | 12. – |
| Heis Aufgabensammlung 1894. | 3. 50 |
| — Auflösungen dazu (Ruland) 3 Bd. 1900. | 19. – |
| Helmert Ausgleichungsrechnung 1872 | 7. – |
| Hensel u. Landsberg Th. d. algebr. Functionen e. Variab. 1902 | 26. – |
| Hermite Sur les integrales definies, la th. de fonctions ... 1891. | 12. – |
| Herz Warscheinlichkeitsrechnung 1900. | 8. – |
| Hesse Vorl. über anal. Geom. d. Raumes 1876 | 10. – |
| — " " " " " Ebene 1881 | 5. 20 |
| — Wyznaczniki (Zdziarski) 1880 | 1. – K |
| Holzmüller Th. der isogonalen Verwandtschaft 1882. | 11. 20. |
| Imschenecki Sur l'integr. des equat. aux derivées part. du I ordre (Houel) 1869 | 12. – |
| L'Intermediaire de mathématiciens 8 Bd (Laisant - Lemoine) 1901 | 45. – |
| Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung (Cantor Dyck) 12 Bd. | 125. – |
| Joachimsthal Anw. d. Diff. Rech. auf Flächen u. Linien 1890. | 6. – |
| Jordan Cours d'Analyse 3 vol. 1896. | 40. – |
| Junker Diff. u. Integral Rechnung (Göschen-Sammlung) | |
| Kelland & Tait Introduction to Quaternions 1873 | 7. 50. |
| | 970.30 Mk |
| | + 1.00 K |



[illegible] I A 25

[illegible]

[illegible]

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Karol | Ryskolow II | | | | |
| Władysław | Müller II | | wdowa po urzędniku: 100 K. | | — |
| Oron. | Portoch 47 ~~47~~ | I pół. I fl. | podurzędnik kolej: 1600 K. drewn. dom | 4 n. | mat. ordn. Żoll d. Estreicher d. Wróbl. b.d. |
| Majer Samuel | Betoban II. 48 ~~48~~ | | nauczyc. ludowy 960 K. + 96 + 144 ojciec: agent handlowy | 2 n. 1 z. | mat bez 1895 sem. naucz. 1899 |
| Franc. | Nowak II | | rolnik 3·5 morga 2 inwentarzem ojcze im | 2 z.c. | mat bez 1898 dobre absolutory z Dubla |
| Erwin | Schlingler I:II | | wdowa po gorzelniku — | — | 2 lata na prawie ? |
| ~~Adam~~ | ~~Drozd~~ | ~~?~~ | ~~?~~ | | ? |
| Jul. | Adamski I | | ? | | ? |
| Stan. | Teodorowicz II | | urzędnik kolejowy :3200 K. — | 8 n. | germanista ? |

51
17
08

Przyczynek do kwestyi sporu między termodynamiką i K. T. g.
Kilka uwag

Uwagi o uzasadnieniu termodynamiki i kinetycznej teoryi gazów.

Zur Frage des Widerspruchs zwischen Thermodynamik und kinetischer Gastheorie.

Einige Bemerkungen über die Begründung des Entropiesatzes und Boltzmann's Grundgleichung

O pewnej wadliwości w uzasadnieniu zasady entropii oraz zasadniczego równania Boltzmanna (H. Theorem) w teoryi kinetycznej gazów.

Über gewisse Mängel in (der Begründung) des Entropiesatzes und der Boltzmann'schen Grundgleichung der kinetischen Gastheorie.

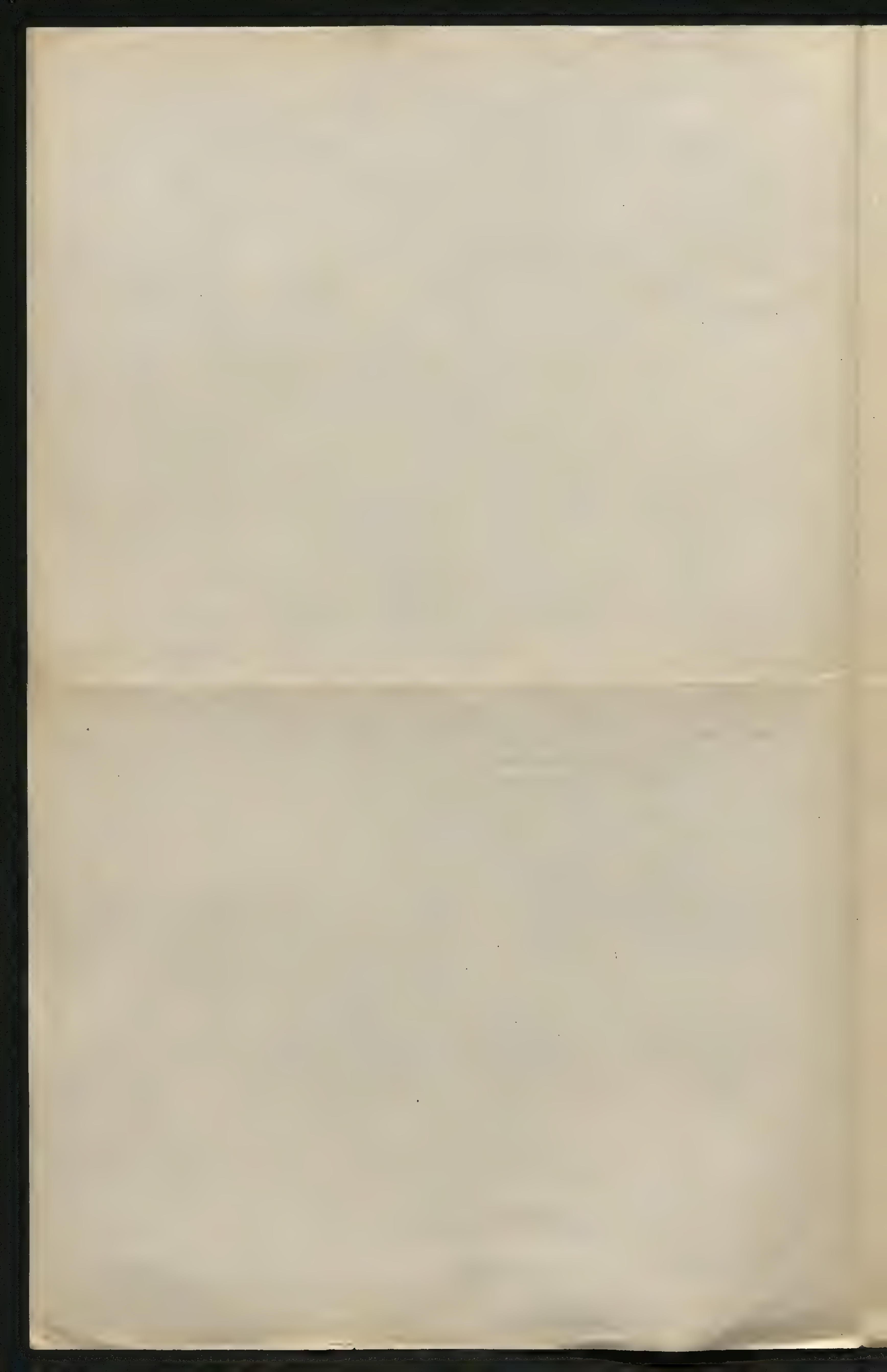
~~W dawniejszych pracach autor wskazał na sprzeczność~~

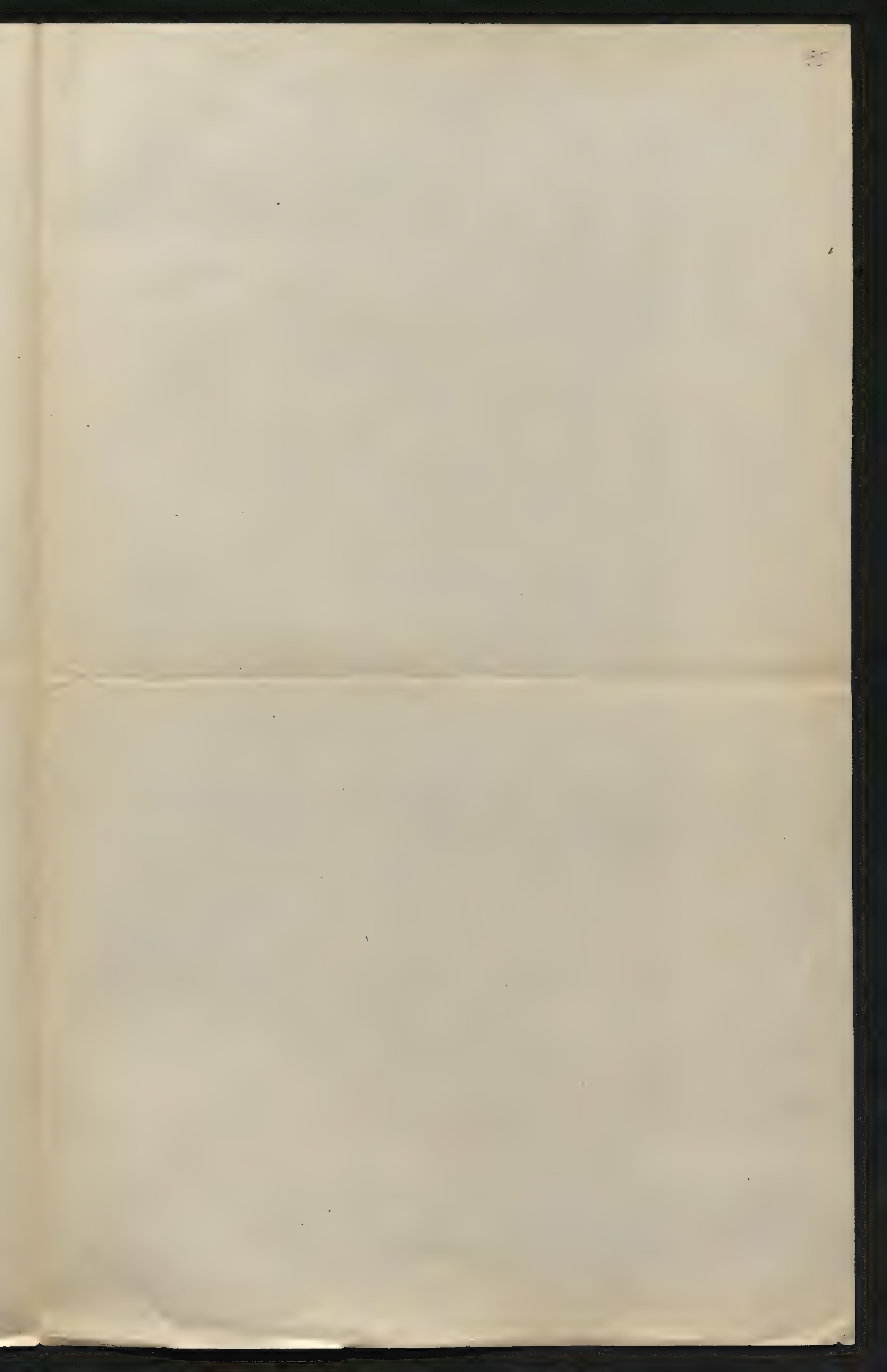
Wiadomo że zjawiska t. zw. fluktuacyi termodynamicznych, (które stanowią przedmiot dawniejszych prac teoretycznych) teoretycznie zbadane zostały przez autora (które pod względem teoret. wyjaśnione zostały przez ...) oraz Einsteina, a doświadczalnie stwierdzone przez Svedberga, Perrina oraz (licznych) badań doświadczalnych

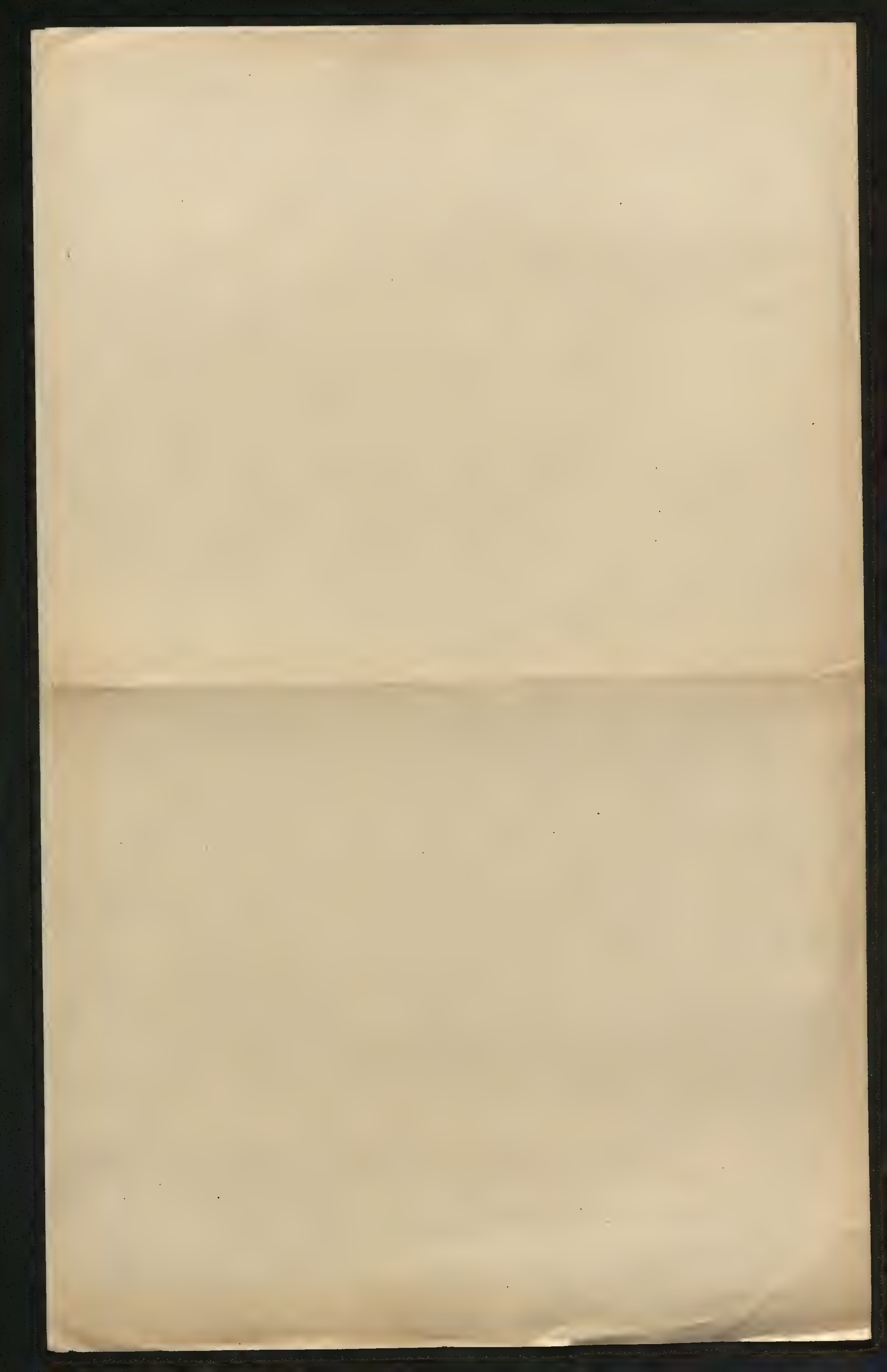
oraz wogóle doświadczalny głównie przez prace 9 * oraz ich uczniów, dowodzą pewnej wadliwości ~~przyjętego~~ przyjętego systemu termodynamiki, i wskutek autorowie sądzili nawet że (ponieważ takie wogóle) ~~zasady~~ ~~po~~ zmuszają one nas do zupełnego porzucenia t. zw. drugiej zasady.

Wbrew tym zapatrywaniom autor w (swoich) dawniejszych pracach rozwinął (wykazał) pogląd, że wprawdzie zasada ta w zwykle przyjętej formie (entropia systemu izolowanego nie może wzrastać) jest (właściwie) błędna, że jednak ważnem pozostaje (zasada entropii za równoważna z tem) twierdzenie że (skuteczne) perpetuum mobile II rodzaju (jest niemożliwem. – w ścisłem słowa znaczeniu –) Zwykle uważa się ~~to~~ (twierdzenie) ~~równanie~~, ponadto wiadomo że Boltzmann ustawił (uzasadnił ~~zasady entropii~~) na podstawie poglądów teoryi kinet. (t. zw. H-Theorem). Wyłania się zatem pytanie, jakie wady tkwią z jednej strony w zwykle przyjętym sposobie wyprowadzania zasady entropii z zasady niemożliwości perpetuum mobile, a z drugiej strony w ~~Boltzmanna~~ wyprowadzeniu zasadniczego równania Boltzmanna, które (wedle) Boltzmanna (teoryi fundament) ~~stanowi podstawę~~ ~~dla~~ ~~...~~, ~~wywodów dotyczących~~ (teoryi kinetycznej gazów).

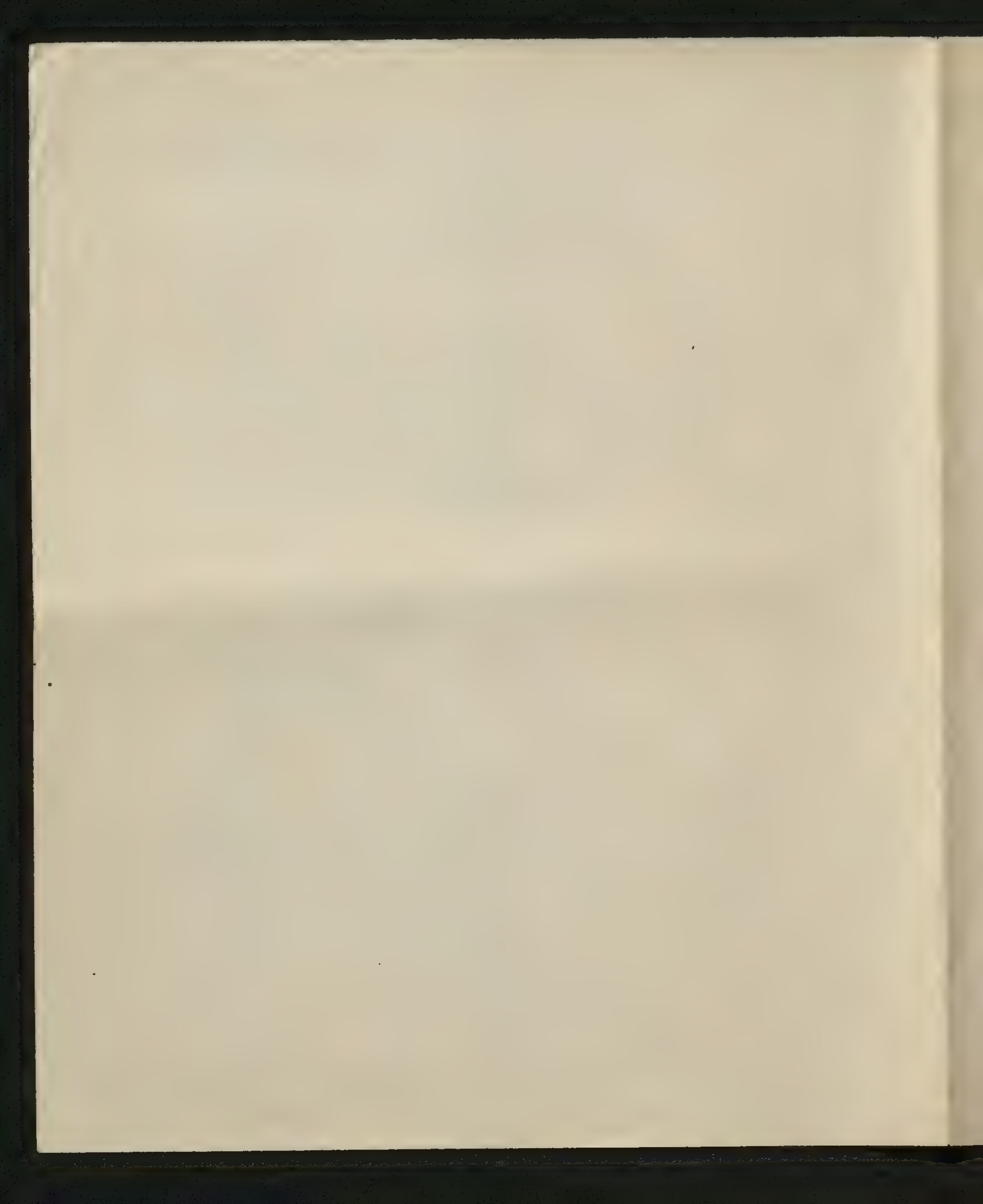
~~Wady te w obu wypadkach~~ Autor wykazuje że (wady te sprowadzić się dają do) ~~...~~ pominięcia zjawiska fluktuacyi; ~~w pierwszym przypadku~~ ~~...~~ (w termodynamice występują one w postaci) ~~...~~ założenia że przebieg zjawiska (deterministycznego, przyjmującego) ~~...~~ jest ~~jednoznacznie~~ (ściśle) określony jest przez podanie pewnych makroskopijnych parametrów, ~~...~~ (w teoryi kinetycznej zaś występują one) w matematycznej formie owego równania, ~~...~~ tylko nie uwzględniając wcale nierówności rozkładu drobin. (Autor ~~...~~ dowodzi że) Równanie (Boltzm.) ważnem jest tylko dla przeciętnego stanu zbiorowiska analogicznych systemów gazowych, ale (że byłoby błędnem stosować je, jak to) ~~...~~ ~~do~~ wogóle się czyni do stanu pewnego indywidualnego (systemu) ~~stanu~~ gazowego.







| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Edm. Lucyan | Tęczarowski I. | wdowa po sekr. powiatowym: 1000 K. | 5. n. | mot odzn. przez rok korepet. w Rzym. | |
| Zdz. Zygm. | Welusz III. | prowadzący kancel. gruntowe przy sądzie w Rzesz. IX rangi | 4 n. | — | Rehm. cel Finkel (3) b.d. dawn. |
| Andrzej 20 | Wyka II | rolnik | 4 z. utrzymujący rod. | Demb. (3) cel (2) cel Dengus b.d. Finkel Sem. b.d. | Finkel cel Demb. cel Rehm. Rep. 2 ad. |
| Ign. 22 (21) | Strycharski II | em. podurzędnik kolej.: 1000 K. | 2 n. 1 z. | Wrotk. (3) b.d. Kruczk. dwd " (3) dwd | Wrotk. b.d. |
| Emil | Sadowski I | księdz. … 1058 K. | 6 n. | mot bez | |
| Alex. ~~38~~ | Solecki IV | 840 K. kontrolor targowy stypt!! | 1 s n. 1 b z 1 s z | Śmol (5) cel Lab. chem. ? cel Sem. mat. cel | |
| Stefan | Strzelecki II. pierworzędnik repariw | stajmisrz pocztowy: 400 K. i skromna realność | | — | |
| Paweł | Mykołów II | — | | — | mot bez z roku 1901 |
| … | … | wdowa po urzędniku: | | — | |



Lusina [illegible]

[illegible]

1916/1917

# Doświadczalne sprawdzenie teoryi Rayleigha o istocie błękitu nieba.

Z pomiędzy rozlicznych teoryi błękitu nieba największe uznanie zyskała teorya Rayleigha, tłumacząca to wszystko jako opalescencyę analogiczną do (t. zw. zjawiska Tyndalla) które cząstki, jak ... ) w ośrodkach mętnych wskutek uginania światła przez cząstki zawieszone. Początkowo Rayleigh sądził że przyczyną opalescencyi są cząstki obce (kropelki, pyłki) jeśli uważamy tylko że się znajdują nie obły..., później przychylił się do zdania że przyczyną są same drobiny powietrza i pod tym założeniem wyprowadził wzór określający spółczynnik opalescencyi:

$$h = \frac{32}{3}\frac{\pi^3 (n-1)^2}{N\lambda^4}$$

Spółczynnik ten wynoszący dla powietrza koło $15 \cdot 10^{-7}$, oznacza ułamek światła wpadającego, który w każdym cm³ gazu zostaje we wszystkie strony rozproszony, a tem samem też oznacza (procentowe) osłabienie promienia pierwotnego przy przechodzeniu przez gaz.

Usiłowano dotychczas sprawdzić wzór ten (a tem samem teoryę Rayleigha) przy pomocy pomiarów nad osłabieniem światła słonecznego w atmosferze ziemskiej, przy czem jednak zmienność warunków atmosferycznych, oraz nie ... określona obecność pyłków i kropelek mgły, tworzą poważne źródło niepewności.

W czasie badań nad teoryą t. zw. opalescencyi krytycznej gazów, mogących się w stanie jednak dostrzec bezpośrednio sposobem laboratoryjnym doszedłem do wniosku, że opalescencya gazów (powietrza i innych) powinna także we wszystkich warunkach, przy ciśnieniu normalnem, jeśli światło wzbudzające będzie dostatecznie silne, a tło zupełnie ciemne.

Przyrząd który w tym celu składał się z rury metalowej, przegrodzonej szeregiem otworów odpowiednio dobranych przesłon, oraz z systemu soczewek, skupiających światło lampy łukowej w środku rury; światło wysłane można obserwować przez boczne okienko ...

Ściany rury są pokryte smarem złożonym z sadzy i gliceryny, do wnętrza można było ... pas oczyszczony i przefiltrowany przez zbitą masę waty zwilżonej gliceryną, i oczyszczony od jonów

... sich um das Absetzen von Kolloidteilchen aus einer anfangs homogenen Lösung an einer adsorbierenden Kugelfläche handelt, und zwar geben sie im letzteren Falle die durchschnittliche Anzahl der betreffenden Teilchen an, um welche die wirkliche Anzahl in zufälliger Weise herumschwanken wird.

### 4. Reflektierende Wand.

Kehren wir nun wieder zur Frage nach der experimentellen Meßbarkeit der Diffusion an grob dispersen Kolloiden zurück.

Da ist nun außer Brillouins Arbeit eine sehr schöne Untersuchung Westgrens[1]) zu nennen, in welcher wiederum von festen Wänden, aber nicht von adsorbierenden, sondern von reflektierenden Gebrauch gemacht wird. Dies entspricht dem normalen Verhalten einer kolloiden Lösung, deren Teilchen im allgemeinen, solange die elektrische Doppelschicht wirksam ist, keine Tendenz haben, an den Wänden zu kleben. Die mathematische Theorie derartiger Fälle ist ganz analog dem vorhergehenden Falle; wir können wiederum die Diffusionstheorie zur Berechnung der Verteilung benützen, nur müssen wir die Grenzbedingung einführen, daß die reflektierende Wand keine Substanz durchläßt; also muß für dieselbe gelten: $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$.

Nehmen wir beispielsweise an, die Ebene $x = 0$ wirke als reflektierende Wand, so läßt sich die Verteilung zur Zeit $t$ auf Grund des bekannten Reflexionsprinzips durch Superposition von symmetrisch zur Wand gelegenen Quellen[1]) konstruieren; war die Anfangsverteilung durch eine Funktion $u = \varphi(x)$ gegeben, so resultiert daraus nach Analogie mit (3):

$$u = \int_0^\infty \varphi(x_0)[W(x_0, x) + W(-x_0, x)]\,d x_0. \quad (47)$$

Westgrens Anordnung erfordert aber keine derlei Rechnungen. Er konzentrierte die Teilchen sämtlich an der Ebene $x = 0$ (und zwar dadurch, daß die betreffende mikroskopische Kammer in passender Weise auf einer Zentrifuge befestigt und eine Zeitlang der Wirkung der Zentrifugalkraft ausgesetzt wurde) und beobachtete dann das allmähliche Wegdiffundieren derselben. Da für die Teilchen in diesem Falle ...

1) A. Westgren, Zeitschr. f. phys. Chem. 89, 63, 1914.

... Schwerkraft bemerkbar macht.

Infolgedessen kommen wir zu der physikalisch evidenten Schlußfolgerung, daß auch im Falle variabler Kräfte für genügend kurze Zeiten das Superpositions-Prinzip gelten muß, und dies ermöglicht uns die Verallgemeinerung der Theorie der Diffusion für den Fall, daß die betreffenden Teilchen von irgendwelchen Kräften beeinflußt werden.

Haben wir es mit Teilchen zu tun, welche unter Einfluß einer Kraft $f(x)$ die durchschnittliche Geschwindigkeit $\beta f(x)$ erlangen so resultiert die Teilchenmenge, welche durch die Flächeneinheit eines Querschnittes $x$ durchströmt, aus Superposition jener konstanten Wanderung und der Diffusionsströmung; sie beträgt also:

$$-D\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u f(x)$$

und daraus erhält man die Differentialgleichung für $u$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial}{\partial x}[u f(x)]. \quad (50)$$

Dieselbe definiert die Verteilung einer diffundierenden Substanz, welche unter Einfluß einer äußeren Kraft $f(x)$ steht. Andererseits können wir sie im Sinne des Äquivalenzprinzipes auf ein einzelnes Kolloidteilchen beziehen und dadurch die relative Häufigkeit $u$ der verschiedenen Lagen desselben bestimmen, d. h. wir erhalten die betreffende Verallgemeinerung der Brownschen Bewegungsformel.

Eine Probe können wir sofort ausführen, da ich für einen Spezialfall, d. i. unter Annahme einer das Teilchen in die Ruhelage zurücktreibenden elastischen Kraft die betreffende Wahrscheinlichkeitsfunktion auf direktem synthetischen Wege ermittelt hatte[1]). Es ist dies jenes Beispiel, welches ich in dem Göttinger Vortrag vor drei Jahren besprochen hatte:

[illegible]

1) Dabei ist aber der Auftrieb seitens des umgebenden Mediums (von der Dichte $\varrho_0$) zu berücksichtigen, welcher im Falle der Aerostatik nur eine unbedeutende — der Benützung des Van der Waalsschen $(v - b)$ anstatt $v$ entsprechende — Korrektur liefern würde. A. Einstein, Ann. d. Phys. 19, 376, 1906; M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 21, 756, 1906; J. Perrin, loc. cit. S. [illegible]; außerdem C. R. 158, 1168, 1914; B. Ilijn, Zeitschr. f. phys. Chem. 87, 366, 1914; A. Westgren, Arkiv f. mat. Svensk. Akad. 9, Nr. 5 (1913); R. Co[illegible]stantin, C. R. 158, 1171, 1341, 1914.

2) Vgl. M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 48, 1103, 1915.

[illegible]

elektrycznych za pomocą silnego pola elektrycznego. Wyniki były następujące:

1). Powietrze (przy prześwietleniu wązką w kierunku ...) promieni światła, niespolaryzowane, co pochodzi od pyłków zawieszonych, dostrzega się często nawet gołem okiem jako punkty świecące

2). Po kilku dniach, gdy pyłki osiadły na ścianach rury, albo też zaraz po napełnieniu powietrza oczyszczonego, pozostaje opalescencja słaba, o odcieniu wyraźnie niebieskim, zupełnie liniowo spolaryzowane w płaszczyźnie — —

3). W wodorze zjawisko to jest słabsze, dostrzegalne tylko dla oka dobrze wypoczętego

4). W chlorku etylu opalescencja jest bezporównanie silniejsza; urządzenie fotometryczne wykazywało natężenie kilkanaście razy większe niż w powietrzu.

Niebieskawa barwa daje się wykazać wyraźnie przy użyciu szkieł barwnych. Stan polaryzacji światła dowodzi, że chodzi tu istotnie o zjawisko Tyndalla, a z teorią Rayleigha zgadza się zupełnie względne natężenie światła, które według niej w wodorze powinno być 4 razy mniejsze, w chlorku etylu 16 razy silniejsze niż w powietrzu.

Przystępujemy do pomiaru. W toku tego doświadczenia więcej precyzyjnego, przy użyciu Słońca jako źródła światła, dokładniejsze [illegible]

Stwierdzono powstawanie zjawiska, mimo starannego oczyszczenia powietrza oraz [illegible], według wzoru Rayleigha — które w wodorze powinno być 4 razy mniejsze, w chlorku etylu 16 razy silniejsze niż w powietrzu — przemawiają bardzo za tem, że czynne są tu same drobiny gazowe.

theorie nützlich sein wird. Stellen wir uns nämlich die Aufgabe, in ganz analoger Weise die Anzahl Teilchen zu berechnen, welche bis zur Zeit $t$ an einer vollkommen adsorbierenden Kugelfläche vom Radius $R$ haften bleiben würden.

Da handelt es sich offenbar nur darum, die Lösung der Diffusionsgleichung mit den Nebenbedingungen:

1. $u = c$ für: $t = 0$ und $r > R$
2. $u = 0$ für: $r = R$ und $t > 0$

zu finden.

Da die Konzentration $u$ offenbar nur vom Radius und von der Zeit abhängt, kann die Lösung mittels bekannter Methoden bewerkstelligt werden, indem die Differentialgleichung die Form annimmt:

$$\frac{\partial (ru)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} \qquad (43)$$

somit auf Grund der Analogie mit der linearen Wärmeleitung in der Form:

$$u = c\left[1 - \frac{R}{r} + \frac{2R}{r\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-R}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}\, dz\right] \qquad (44)$$

gelöst werden kann; es läßt sich ganz einfach aposteriori die Tatsache verifizieren, daß hierdurch die Differentialgleichung (43), wie auch die Grenzbedingungen erfüllt werden.

Daraus folgt für die Menge der sich in der Zeit $t \cdots t + dt$ durch Diffusion an der Kugelfläche $R$ ausscheidenden Substanz:

$$J\,dt = 4\pi D R^2 \frac{\partial u}{\partial r}\Big|\, dt = 4\pi D R c \left[1 + \frac{R}{\sqrt{\pi D t}}\right] dt \qquad (45)$$

und für die Menge, welche von Anfang bis zur Zeit $t$ abgeschieden wurde:

$$M = \int_0^t J\,dt = 4\pi D R c\left[t + \frac{2R\sqrt{t}}{\sqrt{\pi D}}\right]. \qquad (46)$$

Diese Formeln sind einerseits für die Fälle gewöhnlicher, sagen wir „klassischer“ Diffusion verwendbar, wie beispielsweise Ausscheidung von übersättigtem Wasserdampf an kugelförmigen Kondensationskernen, andererseits für Beispiele wo es ...

und ich bemerkt haben, muß das sog. Sedimentations-Gleichgewicht dem Exponentialgesetz der Aerostatik[1]) Genüge leisten, was später durch die schönen Versuche **Perrins** und dessen Mitarbeiter bestätigt und zur Ausarbeitung einer sehr präzisen Bestimmungsmethode der **Loschmidtschen** Zahl benutzt wurde; es muß nämlich gelten:

$$v = v_0\, e^{-\frac{N}{HT}\frac{4\pi}{3} a^3 g (\varrho - \varrho_0) x} \qquad (48)$$

(wo $a$ den Teilchenradius, $(\varrho - \varrho_0)$ den Dichteunterschied der Teilchensubstanz gegenüber der Flüssigkeit bedeutet.)

Will man aber die ganze Erscheinung gründlich verstehen, so muß man die mikroskopische Analyse des Vorgangs ausführen, d. h. man muß untersuchen, in welcher Weise die Bewegungen der einzelnen Teilchen infolge der Schwerkraft und der Gegenwart des Gefäßbodens modifiziert werden, was eine wesentlich schwierigere Aufgabe[2]) ist.

Würde nur die konstante Schwerkraft ins Spiel kommen, ohne daß eine Begrenzung des Raumes zu berücksichtigen wäre, so würde die Lösung einfach daraus folgen, daß die Schwerkraft eine konstante, fortschreitende Bewegung (mit der Geschwindigkeit $c$) hervorruft, welche sich über die **Brownsche** Bewegung (1) superponiert:

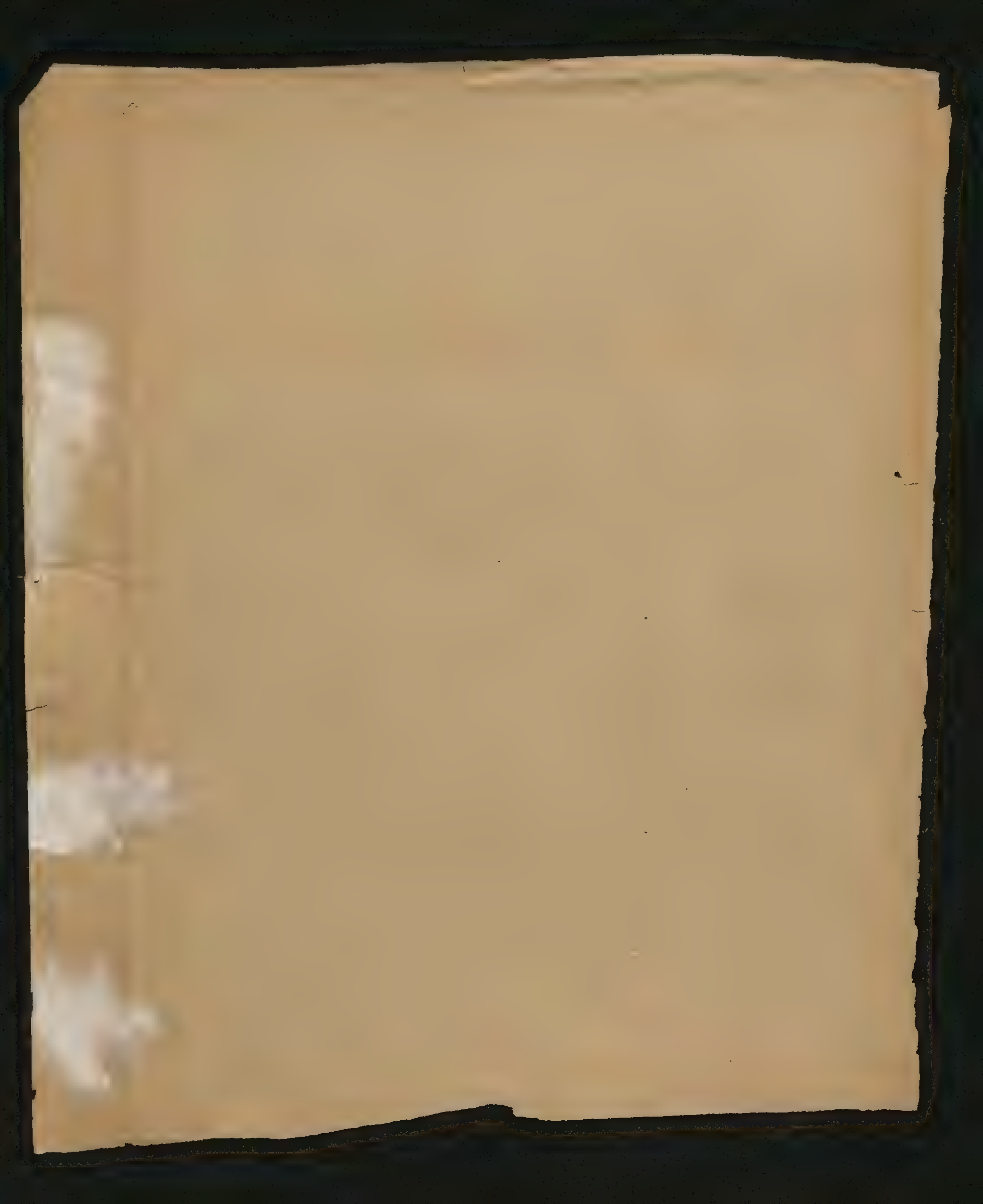
$$W(x, x_0, t)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{(x - x_0 - ct)^2}{4Dt}}\, dx, \qquad (49)$$

so daß an Stelle der Ausgangsabszisse $x_0$ die Größe $x_0 - ct$ auftritt.

Das mittlere Verschiebungsquadrat ist in diesem Falle:

$$\overline{(x - x_0)^2} = 2Dt + (ct)^2$$

und man sieht, daß für genügend kurze Zeiten das zweite Glied im Verhältnis zum ersten verschwindet. Da die Verschiebungs-Geschwindigkeit der **Brownschen** Bewegung anfangs unendlich groß ist, versteht man auch unmittelbar, ohne Rechnung, daß die Bewegung anfangs rein „Brownisch“ erfolgt, und daß sich erst im Laufe der Zeit die allmähliche Verschiebung infolge der Schw...



O prof. [illegible]
[illegible]



Grabowski Lucyan 29 lat ; doktorat 1900 w Monachium
4-5 lat w Krakowie, 3 lata w Monachium,
1 w Pulkowie

---

1). Einige Bemerkungen zur Erklärung d. Polbewegung
Wien. Sitzgsber. 107 (1898)

2). Beobachtungen von kleinen Planeten
Astron. Nachrichten (1898)

3). Theorie d. harmonischen Analysators
Wien. Sitzgsber. (110) 1901

4). Zur Frage d. Veränderlichkeit von α Persei
Astron. Nachrichten (1902)

5). O ~~obserw~~ obserwacyach fotometrycznych Nowej Perseusza dokonanych w Obserwator. w Pulkowie
Wiadom. matemat. (1902)

6). W druku: Photometrische Beobachtungen d. Nova Persei auf d. Sternwarte i Pulkovo
Akad. Petersburg 1902

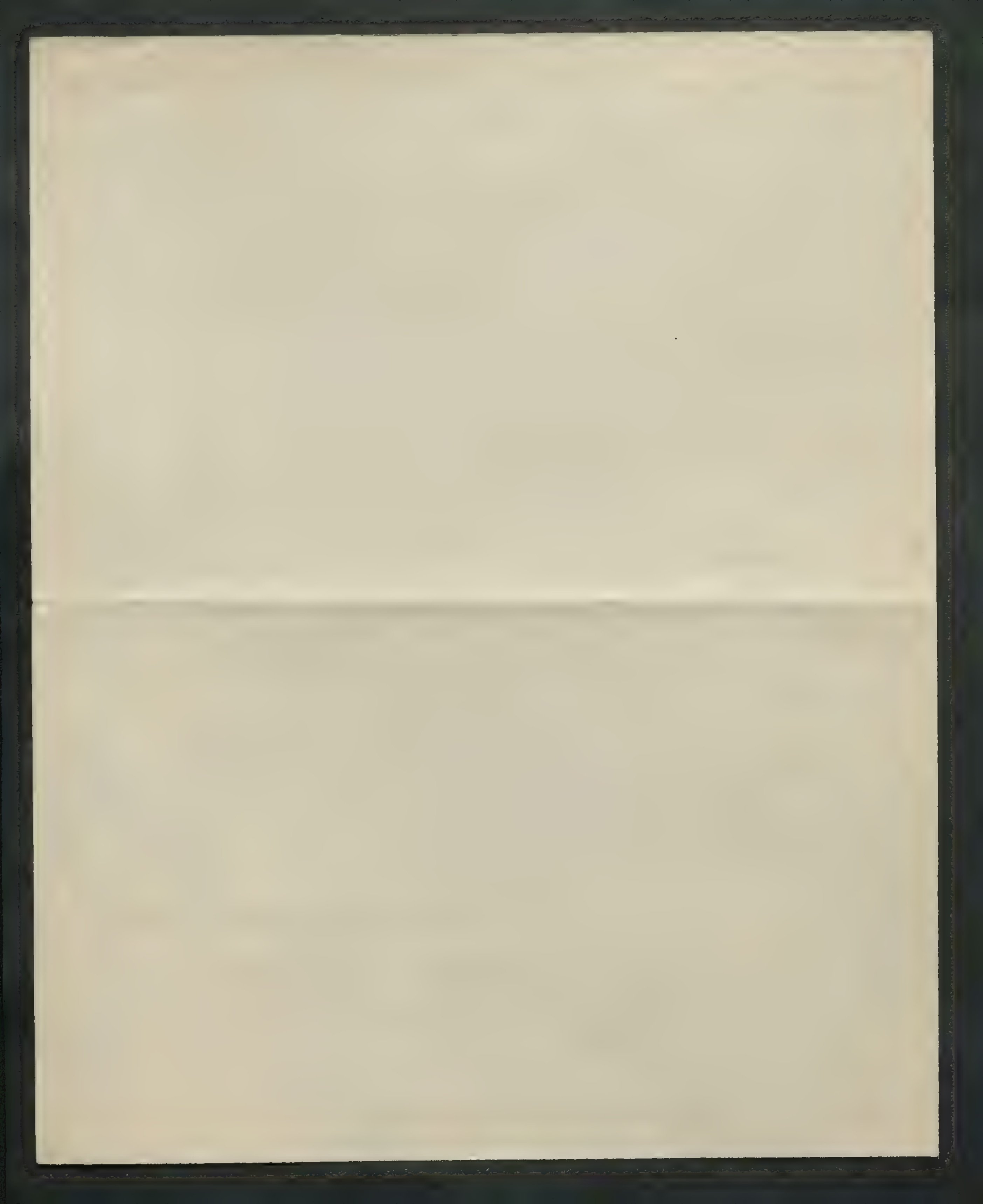
---

W manuskrypcie : O okresie Algola diss. Monach., ~~zostanie~~ obrobione z powodu nowszych obserwacyi, będzie służyć do habilitacyi.

Materyały do:

1). gwiazdy Gill'a

2). o mikrometrze nieosobistym Repsolda



Das Prof.-Coll. der phil. Facultät der Univ. zu Lemberg erlaubt sich hiemit dem k.k. Unterrichts Minist. den Vorschlag zu unterbreiten eine Lehrkanzel für Astronomie an der gesammten Universität zu schaffen da die Gründung einer solchen Professur nunmehr schon zu einer unabweislichen Nothwendigkeit geworden ist.

Die Bedeutung der Astronomie als einer selbstständigen Wissenschaft, ja als Krone der exakten Wissenschaften braucht wohl nicht näher hervorgehoben zu werden. Allbekannt ist ferner der untrennbare Zusammenhang der Astronomie mit der allgemeinen Physik, insbesondere der Mechanik und Spectroskopie, ebenso mit der Mathematik, welche jahrtausendelange von der Astronomie Anregung empfangen hat und auch in ihr die [augenscheinlichsten] grössten Triumphe gefeiert hat. Es ist wohl auch nicht nöthig, die Wichtigkeit derselben als Hilfswissenschaft für den Geographie, Geologie, Chronologie und Schiffahrt und [illegible] deren praktischen Anwendungen in der Nautik und [illegible], näher zu beleuchten.

In der That dürfte es auch in der ganzen Welt keine zweite Universität von der Bedeutung Lembergs geben, welche nicht eine Lehrkanzel für Astronomie besässe — und an vielen grösseren Universitäten ist diese Professur (eventuell in Verbindung mit verwandten Fächern wie Geophysik, Geodäsie etc.) mehrfach besetzt.

~~Sie ist ja nicht nur durch den Gegenstand ihrer Forsch~~ diejenige unter den exakten Wissenschaften welche

Unter den exakten Wissenschaften zeichnet sie sich aus durch ihr ehrwürdiges Alter ~~und erst~~ durch die Größe und Erhabenheit ~~ihres~~ des ~~Gegenstandes ihrer Forschung~~ ihres Endzweckes: die Erforschung des Weltalls und nicht nur der durch ~~den innigen Zusammenhang mit~~ ihre Bedeutung für andere Wissenszweige des menschlichen Wissens.

~~So~~ möge nur auf die ~~Zusammenhang der Astr. mit der allg. Physik hingewiesen~~ Rolle (welche die Astr. in der allg. Ph. gespielt hat): ~~wieder~~ sie hat Newton die Gesetze ~~der Mechanik~~ mechanischer Kräfte gelehrt und bildet bis heutzutage die Hauptstütze für die theoretische Mechanik, sie hat zuerst ~~die~~ eine Messung der Geschwindigkeit des Lichtes ermöglicht, ~~und dadurch~~ sie hat die Aberration des Lichtes und das Doppler'sche Prinzip erwiesen welche bis heutzutage ~~durch keinen~~ den terrestrischen Experimenten nur unzugänglich sind, und eine Fülle anderer Erscheinungen – es ~~mag~~ seien nur die Spektralanalyse erwähnt ~~erst~~ – erschlossen.

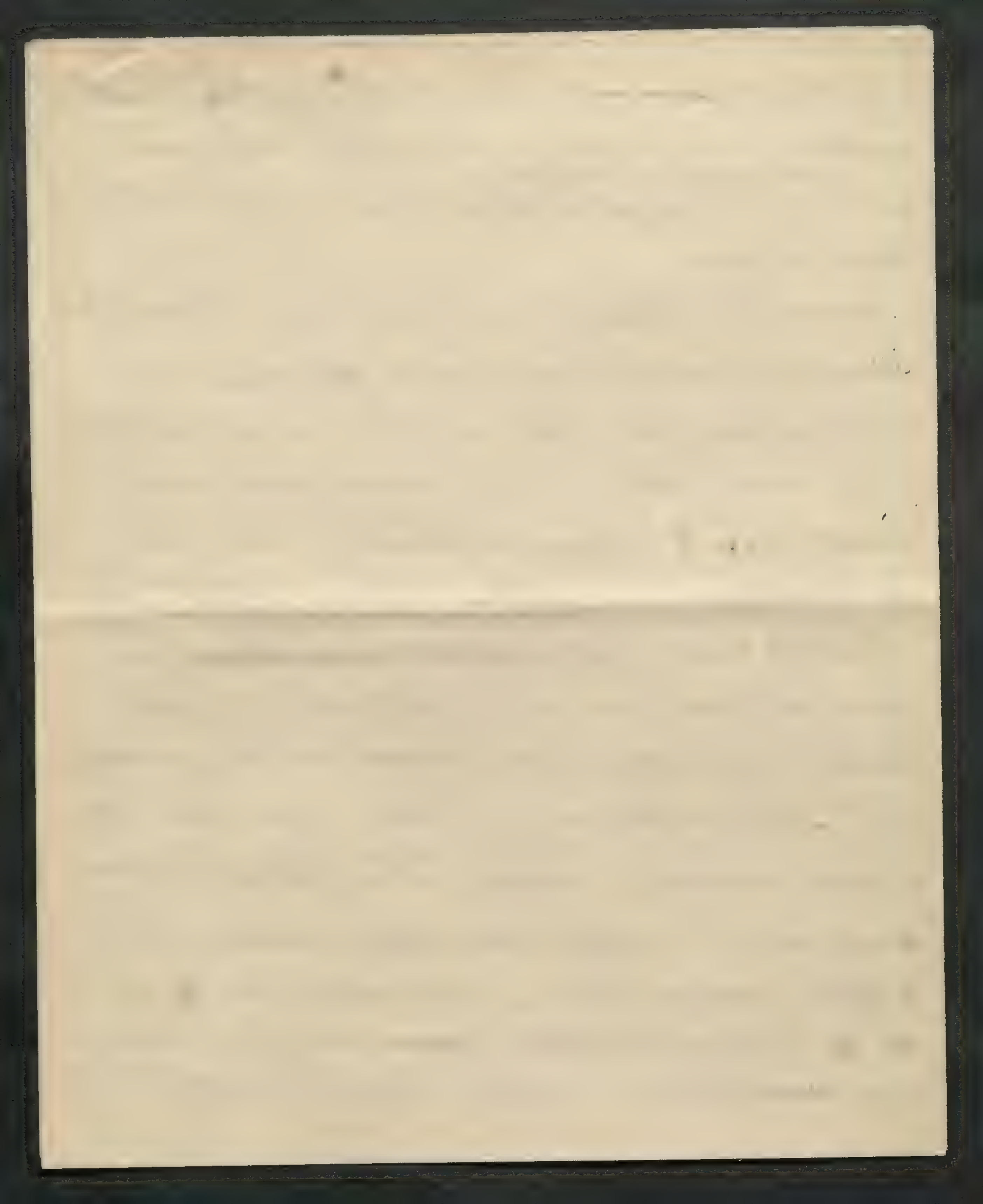
Ebenso ist bekannt, dass die Mathematik gehört

In richtiger Erkenntnis ~~dieser~~ der bedeutungsvollen Rolle der Astronomie haben auch (seit jeher) ~~die Culturen~~ die Regierungen sämmtlicher Völker und Staaten, welche auf den Namen Culturstaaten Anspruch machten, ~~den Astronomen~~ ihrer Pflege besonders ~~Pflege~~ Aufmerksamkeit gewidmet, und auf keine andere der exakten Wissenschaften sind solche Summen von Staatswegen verwendet worden wie auf die Astronomie

In Österreich ist (außer Czernowitz) Lemberg (als einzige) Universität anzuführen, wo keine Professur für diesen Gegenstand besteht, welcher doch auch an Mittelschulen gelehrt werden muss und daher als Prüfungsgegenstand für das Lehramt an Gymnasien und Realschulen figurirt.

Da die Nothwendigkeit der Gründung einer solchen Lehrkanzel in Lemberg, insbesondere in Anbetracht der rasch wachsenden Hörerzahl der realistischen Fächer, klar am Tage liegt, können nur zwei Punkte in Fragen kommen, betreffs welcher eine Schwierigkeit bestehen könnte, namentlich die Schaffung eines astronomischen Observatoriums und die Personalfrage.

In Betreff des ersten Punktes ist eine (künftige) Lösung dieser Angelegenheit dadurch erleichtert, dass beim Entwurfe der Pläne für das neue Universitätsgebäude für geeignete Localitäten Vorsorge getroffen wurde. Um jedoch die dringende Schaffung dieser Professur nicht weiter verzögern zu müssen, hat das Professoren Collegium von weiteren diesbezüglichen Vorschlägen derzeit einstweilen Abstand genommen, da sich der ord. Prof. der Astron. an der technischen Hochschule in Lemberg Dr. Laska in dankenswerther Weise bereit erklärt hat, die Durchführung der praktischen astronomischen Arbeiten an seinem Observatorium an der k. k. techn. Hochschule zu gestatten.



Da demnach die erwähnte Schwierigkeit durch das Entgegenkommen Prof. Laskos beseitigt ist bleibt nur noch die Frage zu erledigen welche Candidaten zu einer würdigen Vertretung ~~für~~ dieses Lehramtes befähigt sind. und . . [illegible]

Von den Forschern polnischer Zunge welche in neuerer Zeit Arbeiten ~~[illegible]~~ aus dem Gebiete der Astronomie geliefert haben, können in Betracht kommen: nach Altersordnung

1). Kowalczyk
2). Ceraski
3). Birkenmajer
4). Merecki
5). Smit
6). Grabowski
7). Graff

Von diesen entfällt des Alters wegen Kowalczyk, welcher nahezu 70 Jahre zählt.

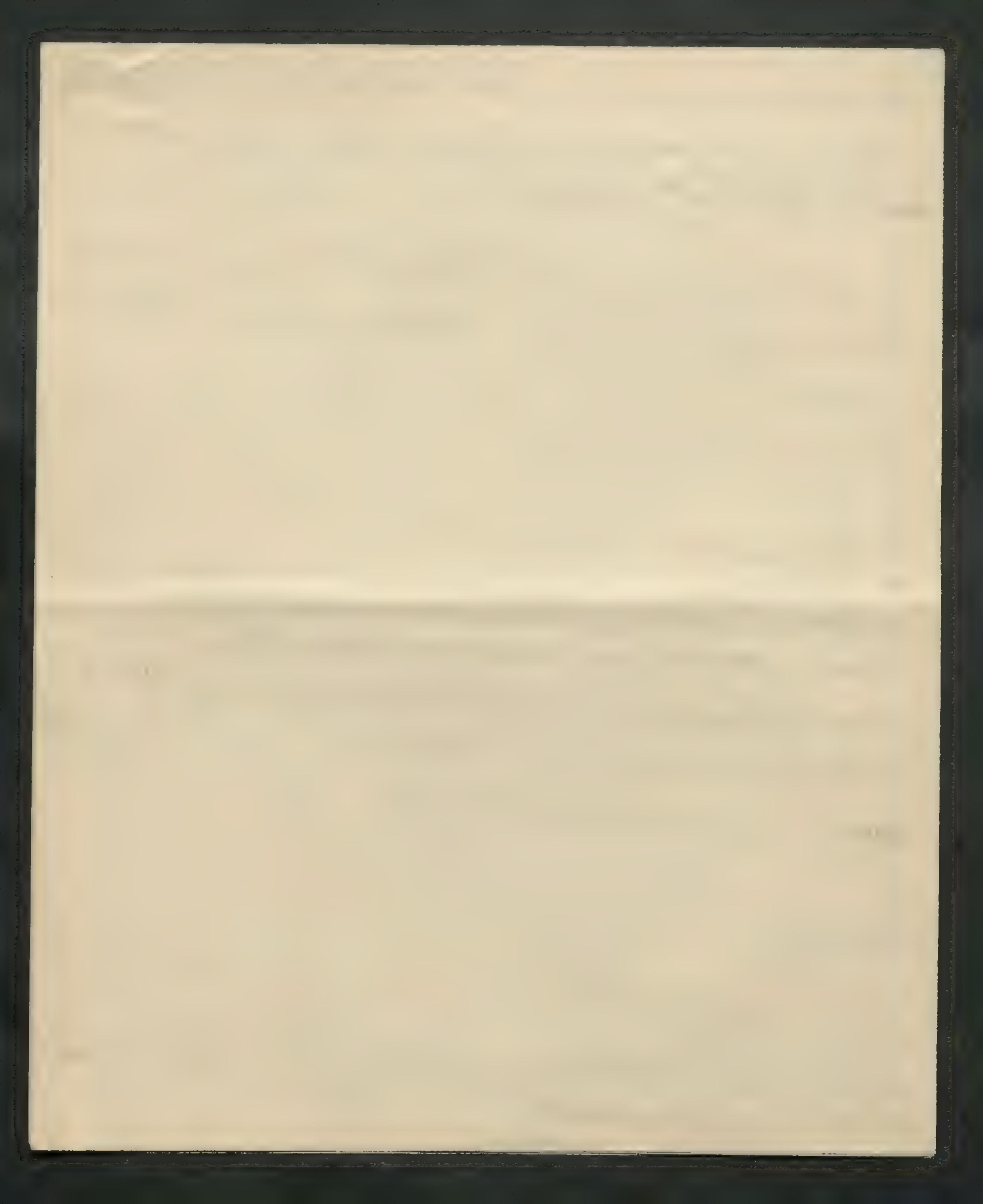
Ebenso Graff; gegenwärtig bei der Normalaichungscommission in Berlin ~~[illegible]~~ und als Assistent an der Urania in Berlin thätig, welcher wenig über 20 Jahre alt ist.

Ceraski ist gegenwärtig Direktor der Sternwarte in Moskau.

Birkenmajer

. . . fand aber bisher zu wenig Gelegenheit sich als praktischen Astronom zu bethätigen.

Merecki ist gegenwärtig Observator an einer Privatsternwarte in Warschau und mehr als astronomischer Amateur bekannt.



Es kommen mithin ~~...~~ eigentlich nur zwei Candidaten in Betracht welche eine eingehendere Besprechung erfordern nämlich Grabowski u Ernst.

Dr Lucyan Grabowski 29 Jahre alt, ist derzeit Adjunkt an der Sternwarte in Krakau.

Er studirte in Krakau, ging dann auf einige Jahre nach München, wo er unter Seeliger astronomische Forschungen betrieb und das Doctorat ablegte und schließlich ~~nach Pulkowa~~ war er ein Jahr lang in Pulkowa thätig.

Seine wissenschaftlichen Arbeiten sind

1) Beobachtungen von kleinen Planeten Astr. Nachr. enthält ~~...~~ Messungen der Position von 4 Planetoiden welche an der Münchner Sternwarte ~~...~~ ausgeführt wurden

2) Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegung

~~3) Thesis der ... Doctordissertation~~

Bekanntlich hat die Erdaxe nicht eine absolut im Raume fixe Richtung sondern führt kleine kreiselartige Schwankungen aus, welche zu den in den letzten Jahrzehnten von zahlreichen Astronomen beobachteten Schwankungen der Polhöhe Veranlassung geben, und welche von Helmert theoretisch näher untersucht worden sind.

Grabowski bemerkt, dass die in Chandler's Formel zusammengefassten empirischen Resultate ~~...~~ zu einigen Correcturen Verbesserungen der Helmert'schen Erwägungen nöthigen und zeigt überhaupt, wie aus ~~durch~~ der Bewegung der Rotationsaxe die Bewegung der Trägheitsaxe abgeleitet werden kann, was auch in Hinsicht auf ~~einen Erklärung~~ Versuch Spitaler's einer ~~...~~ Erklärung jener ~~...~~ Bewegungen von Bedeutung ist.

näher ausgeführt sind.



3). Theorie d. Harmon. Analysators.

Die Theorie dieses Instruments, welches für manche Anwendungen in der Astronomie und Physik von Henrici in London erfunden grosse Bedeutung besitzt war in den Grundzügen schon bekannt. Von Grabowski wurde sie in dieser Abhandlung, seiner Doctordissertation, mit Rücksicht auf den Einfluss der verschiedenen Fehlerquellen bis ins letzte Detail vervollständigt, wodurch manche die Genauigkeit der Messungen bei Anwendung dieses Instruments erheblich gesteigert wird.

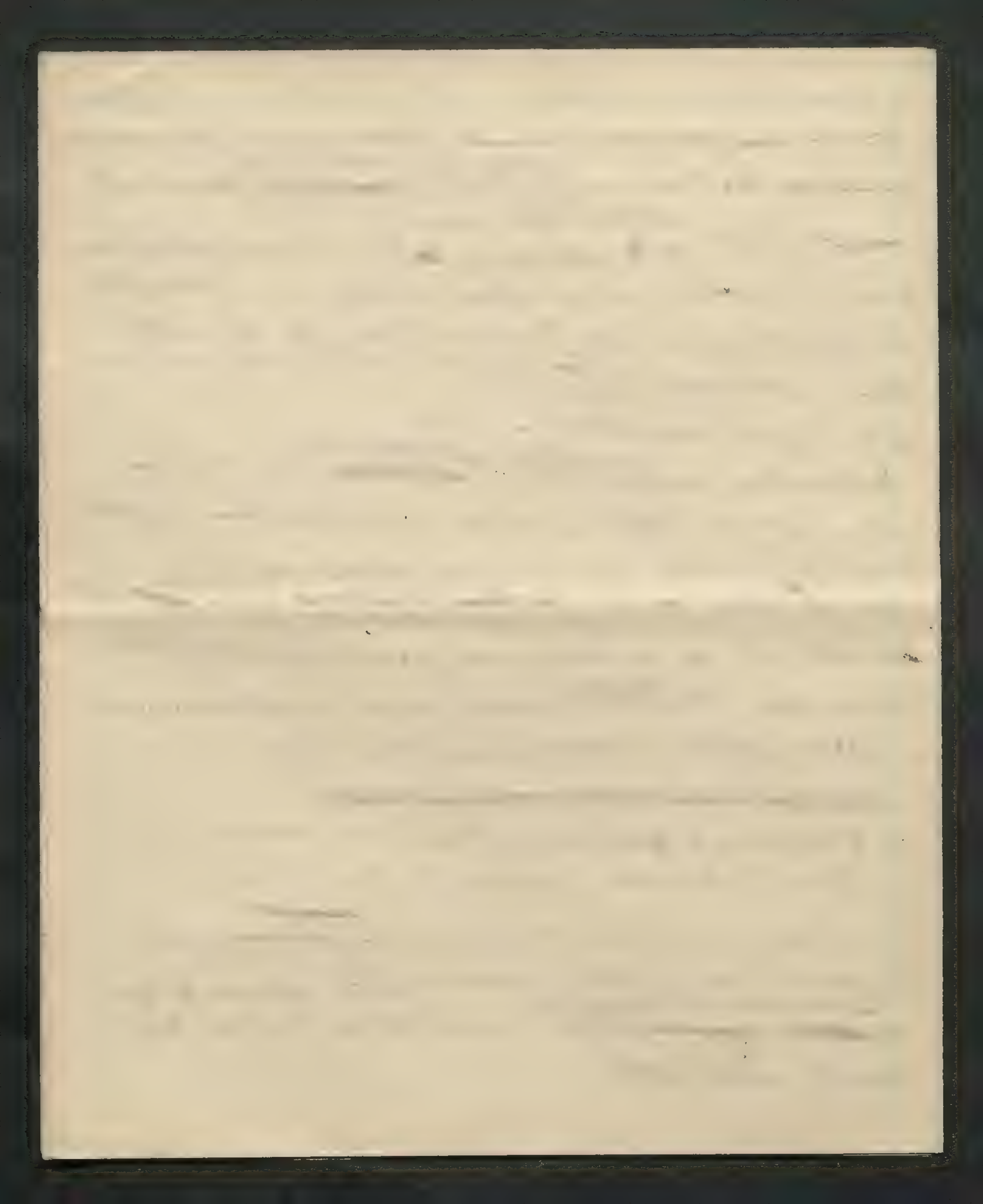
4). Zur Frage der Veränderlichkeit von α Persei

Die Beobachtungen der Veränderlichkeit des im vergangenen Jahre neu erschienenen Sternes Nova Persei wurden von zahlreichen Astronomen meist durch Vergleichung mit dem oben erwähnten Sterne ausgeführt.

Nun hat der Guthnick in Bonn behauptet, dass auch α Persei selbst veränderlich ist, was eine Revision jenes gesammten Beobachtungsmaterials erfordern würde. Diese Behauptung wird von Grabowski durch Discussion seiner eigenen in Pulkowa angestellten Beobachtungen dieses Sternes widerlegt.

5). O obserwacyach fotometrycznych Nowej Perseusza dokonanych w Obserw. w Pulkowie [Photometrische Beobachtungen der Nova Persei anst. - - - ]

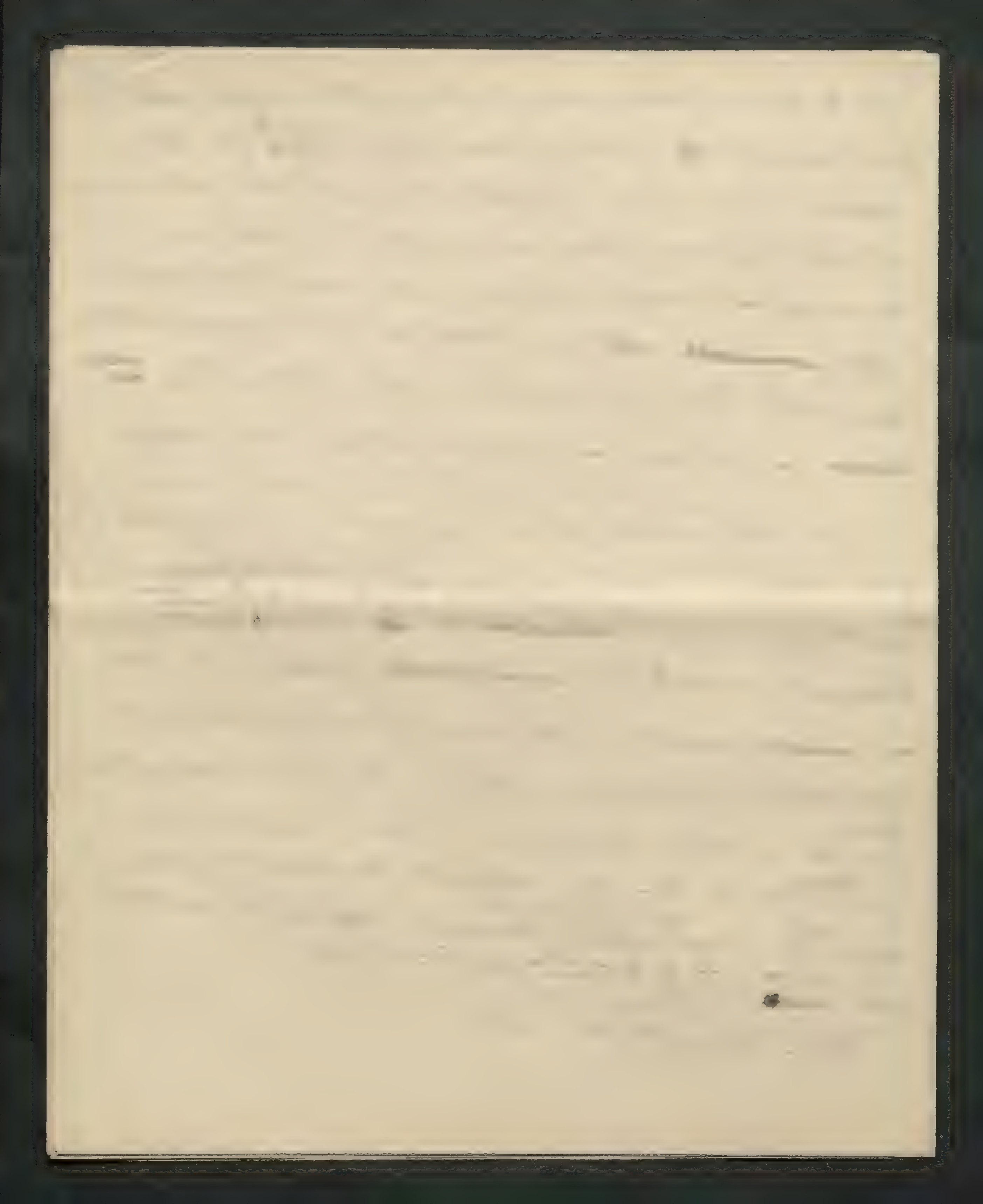
Es ist dies nur ein kurzer Auszug aus einer demnächst in den Sitzungsber. der Kais. Akad. zu Petersburg erscheinenden in Druck befindlichen Arbeit, welche eine Darlegung des von Grabowski und Zipel in Pulkowa gewonnenen auf die Veränderlichkeit von Nova Persei bezüglichen Beobachtungsmaterials enthält.



Außer diesen im Druck erschienenen Arbeiten besitzt Grabowski noch
6). ein Manuscript „Über die Periode Algols" auf Grund welches ihm von der
Krakauer Akademie d. W. ein Reisestipendium nach Pulkowo verliehen wurde,
und welche demnächst in Druck erscheinen soll. Sie enthält eine
Anwendung der harmonischen Analyse auf die Veränderlichkeit des Sternes
Algol zum Zwecke der Gewinnung einer verlässlichen
experimentellen Basis zur Entscheidung der viel umstrittenen Frage,
was für Ursachen die Veränderlichkeit jenes Sternes bedingen.

Aus diesen Arbeiten ergibt sich Grabowski als ein vielversprechendes
junges Talent zu erkennen, von welchem in Zukunft mit Zuversicht eigenständige Leistungen
erwartet werden können. In den Arbeiten Grabowski's ist vor allem deren peinlich genaue
Detailarbeit und Gründlichkeit bemerkenswert, welche
namentlich in den in das Gebiet der Instrumentenkunde
hinüberspielenden Untersuchungen auffällt. Diese scheinen überhaupt sein
Lieblings-Spezialfach zu bilden, Abhandlung 2 (und teilweise 3) erweist auch seine
Eignung bei Behandlung mathematisch theoretischer Untersuchungen,
doch sind die Anzahl (praktischer Beobachtungen und) speciell astronomischer Arbeiten 1 4 5 verhältnis-
mäßig geringer und die behandelten Gegenstände sind wenig vielseitig.

Alles in allem ergibt sich G. als



Bezüglich des zweiten Candidaten Dr Ernst können wir uns kurz fassen, da 104
über ~~[illegible]~~ denselben schon in der am 13 Juli 1900 betreffs Erteilung der venia
legendi ~~[illegible]~~ an das Hohe k.k. Ministerium gerichteten Eingabe ausführlich berichtet wurde.

Dr Ernst hat ausser ~~einer~~ einem wissenschaftlichen Lehrbuch

Astronomia gwiazd stałych

und zwei populär wissenschaftlichen Schriften

O przyrodzie planet

O końcu świata i kometach

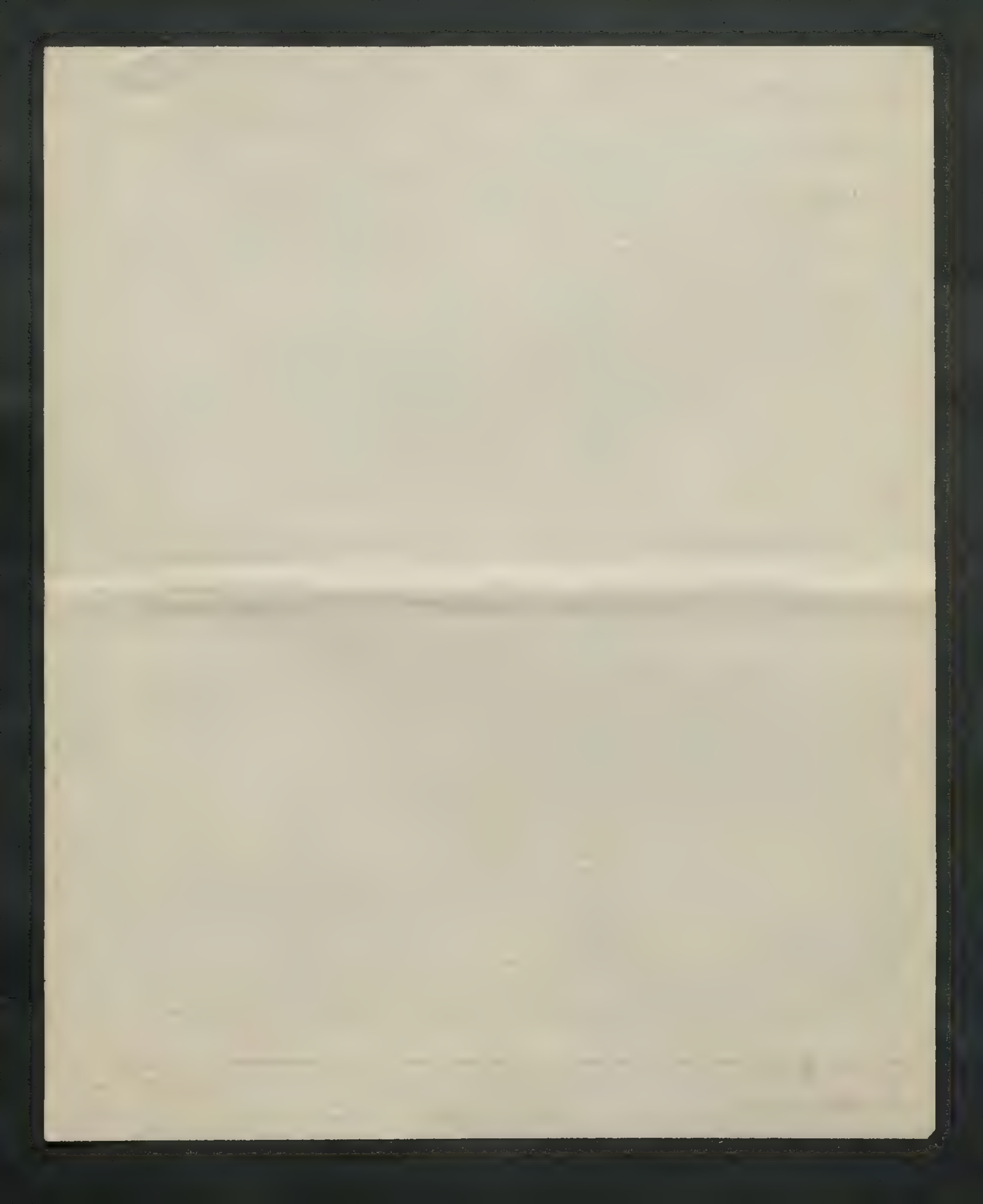
bis zu seiner Habilitation (folgende ~~wissenschaftlichen~~ Arbeiten veröffentlicht:

Ausserdem zahlreiche Beobachtungen von Planeten u Kometen in den Astr. Nachr.,
~~[illegible]~~ Ephemeriden von Aletheia in den astr. Nachr. u Vierteljahrsschrift d. A. G. [illegible] der Ost–
und populär wissenschaftliche Artikel im Wszechświat

Indem betreffs Inhaltsangabe ~~der meisten~~ ~~jener Arbeit~~ jener Arbeiten auf das erwähnte
frühere Referat verwiesen wird, mögen ~~nur~~ hier ~~nur~~ überdies noch zwei seit jener Zeit erschienenen
Abhandlungen angeführt werden:

O nowym wzorze interpolacyjnym dla widma pryzmatycznego

Es wird darin eine neue Interpolationsformel zur Reducierung des prismatischen Spectrums auf das normale Spectrum ~~aufgestellt~~ begründet welche genauere
~~und mit viel geringeren Aufwand an Rechnung~~ ~~[illegible]~~
Resultate liefert als die bisher als beste empfohlene Hartmann'sche und welche dabei die Rechenarbeit wesentlich erleichtert.



O wyznaczeniu szerokości geogr. Lwowa za pomocą przejść kulmin. i wyjątków w zenicie.

und demnächst in den Sitzgsb. d. Krak. Ak. erschien

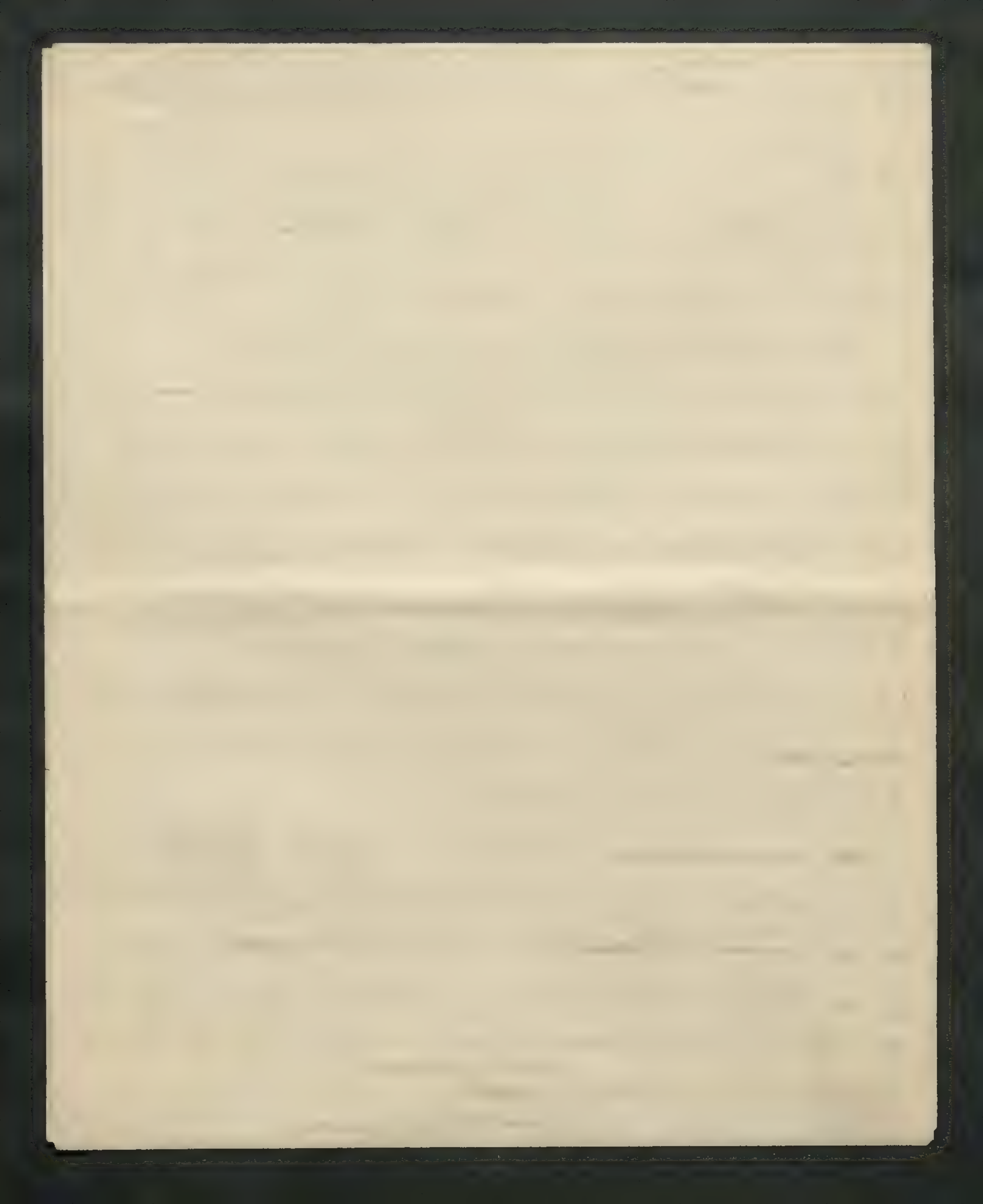
Diese Arbeit, in welcher der Verfasser auf Grund eigener an der Sternwarte in Lemberg angestellter astronomischer Messungen die geogr. Breite der Sternwarte Lembergs ermittelt, enthält eine erhebliche Berichtigung der bisher angenommenen Daten.

Zur Characteristik sämtlicher dieser Arbeiten sei bemerkt:

Die populärwissensch. Schriften sowie das Werkchen 1). zeugen von ausgebreiteter Litteraturkenntnis, sowie der Gabe einen schwierigen Gegenstand leicht fasslich darzustellen. Abhandlgn 4 und 7 bringen erhebliche neue Beiträge auf dem Gebiete der theoretischen Astronomie. Die Berechnung des Planeten Aethera zeigt, dass Dr Ernst den mühevollen numerischen Rechnungen der modernen Astronomie vollkommen gewachsen ist.

2, 6, 9 sowie die zahlreichen Beiträge zu den Astron. Nachrichten, erweisen dem sein Eifer und Geschick im astronomischen Beobachten und in der Bearbeitung des gewonnenen Materials.

Dr Ernst wissenschaftliche Leistungen zeichnen sich im Vergleich zu jenen Grabowski's vor Allem durch grössere Fülle und Vielseitigkeit aus, was darin begründet ist, dass Dr Ernst eben seit längerer Zeit als Grabowski mit praktischen astronomischen Forschungen beschäftigt ist. Dr Ernst hat thatsächlich auf allen Gebieten der rechnenden und beobachtenden Astronomie seine Leistungsfähigkeit erwiesen.

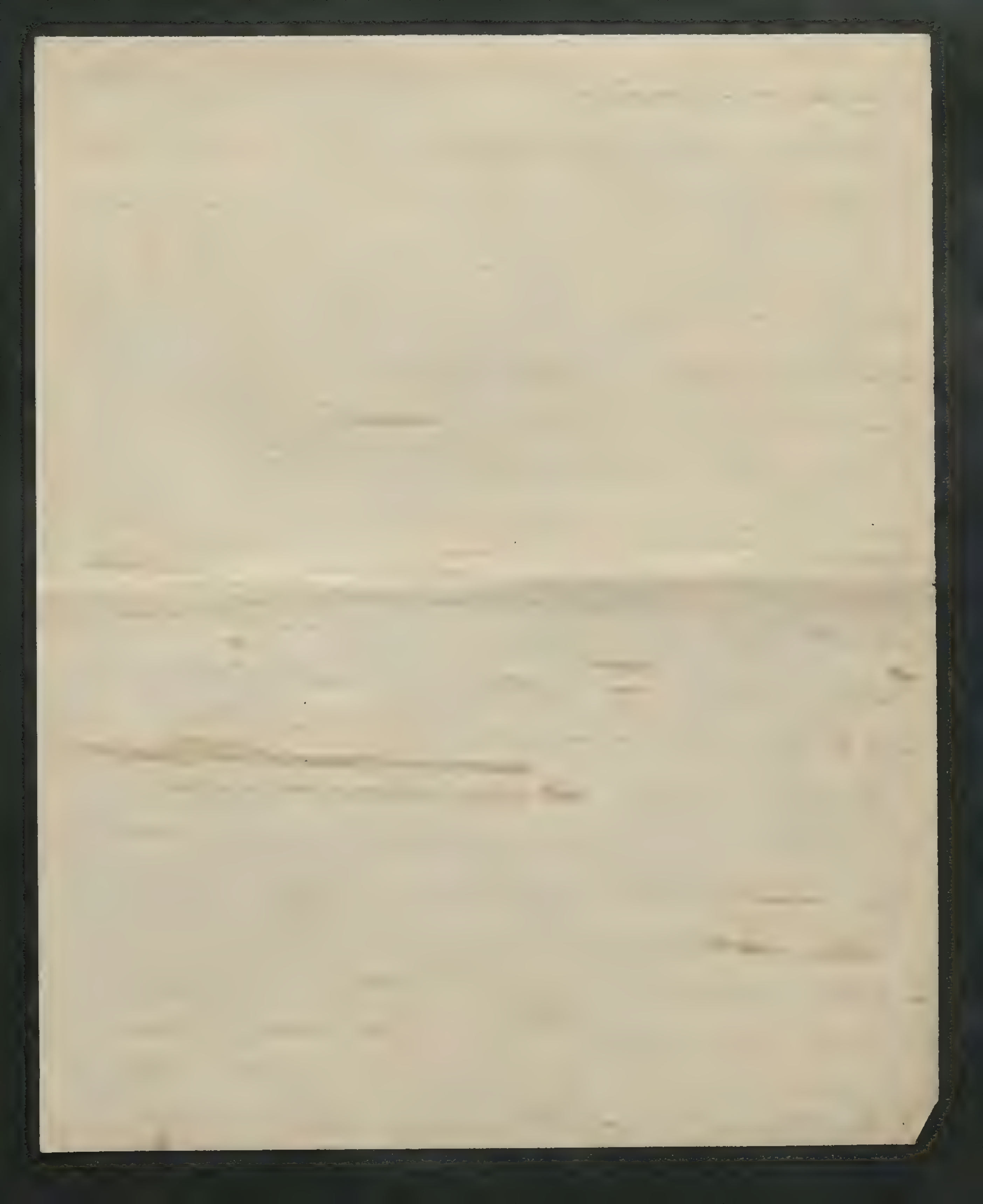


Mit dem erwähnten Umstande steht auch die unverkennbar grössere Selbstständigkeit und Reife der Arbeiten Dr Ernst's im Zusammenhange.

Wenn weiters berücksichtigt wird, dass Dr Ernst seit einer Reihe von Jahren als Assistent am Observatorium der k.k. techn. Hochschule thätig ist und als solcher sich mit sämmtlichen praktischen Obliegenheiten vollständig vertraut gemacht hat, während Dr Grabowski erst in den letzten Monaten eine analoge Stellung in Krakau erlangt hat, wenn weiters in Erwägung gezogen wird, dass Dr Ernst seit zwei Jahren habilitirter Docent an der Universität zu Lemberg ist, Grabowski dagegen die Docentur noch nicht erlangt hat, so muss zugegeben werden, dass bei ersterem eine grössere Garantie für selbstständige wissenschaftliche Forschung wie auch für eine ersprießliche pädagogische Thätigkeit gegeben ist.

Aus diesem Grunde hat das bei der Sitzung vom einstimmig beschlossen, Dr Ernst als Candidaten für die Lehrkanzel der Astronomie vorzuschlagen.

Somit wendet sich das Prof. Coll. d. phil. Facultät d. Univ. zu Lemberg an d. hohe Minist. f. C. u. U. mit der Vorschlage Bitte, dass hohe Ministerium möge — in Anbetracht des dringenden Bedürfnisses nach Nothwendigkeit einer Professur für Astronomie und Anbetracht der vorzüglichen Eignung Dr Ernsts für eine solche — Herrn Dr Ernst zum außerord. Prof. d. Astronomie a. d. Univ. Z. ernennen.



Pani [illegible]

będzie o wpół do czwartej

u p. Redaktora.

